۱۳۹۵/۰۳/۰۳

لم ۱- با تعریف بالا $R \notin R$

اثبات: طبق برهان خلف: اگر فرض کنیم $R \in R$ آن‌گاه طبق تعریف مجموعه‌ی R نتیجه می‌شود $R \notin R$. یعنی از $R \in R$ نتیجه شد $R \notin R$ که یک تناقض است ولذا فرض خلف باطل است و نتیجه می‌گیریم $R \notin R$

لم ۲- با تعریف مجموعهٔ R به شکل بالا، $R \in R$.

اثبات: طبق برهان خلف فرض کنیم $R \notin R$. شرط عضویت در مجموعهٔ R برای این مجموعه وجود دارد ولذا $R \in R$ که باز هم یک تناقض است.

نتیجه: لم ۱ و ۲ یک تناقض آشکار است پس وجود مجموعه R منتفی است یعنی مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

فصل سوم

• زوج مرتب: برای هر دو مقدار a و b، زوج مرتب آن‌ها به شکل (a,b) قابل تعریف است. کلمه‌ی مرتب بدان معناست که ترتیب قرارگرفتن a و b مهم است. یعنی لزوماً (a,b) و (b,a) برابر نیستند.

نکته: اگر (a,b) و (c,d) دو زوج مرتب باشند، آن‌گاه:

$$(a,b) = (c,d) \iff a=c \wedge b=d.$$

• حاصل ضرب دکارتی: فرض کنید a و b دو مجموعه‌ی دلخواه باشند حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A ,\ b\in B\}$$

۴ خرداد
۱۴۳۷ — ۱۷ شعبان
2016 — 24 May

۱۳۹۵/۰۳/۰۴

مثال: اگر $A=\mathbb{N}$ و $B=\{a,b\}$ آن‌گاه

$$A\times B=\begin{cases}(۱,a)\,(۲,a)\,(۳,a)\cdots\\(۱,b)\,(۲,b)\,(۳,b)\cdots\end{cases}$$

$$B\times A=\begin{cases}(a,۱)\,(a,۲)\,(a,۳)\cdots\\(b,۱)\,(b,۲)\,(b,۳)\cdots\end{cases}$$

مثال: برای هر مجموعه‌ی دلخواه A، $A\times\phi=\phi\times A=\phi$

• قضیه: برای مجموعه‌های دلخواه A و B و C:

1) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

اثبات ۲:

$$(a,x)\in A\times(B\cup C)\equiv a\in A\wedge x\in(B\cup C)\equiv a\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$$

$$\equiv(a\in A\wedge x\in B)\vee(a\in A\wedge x\in C)\equiv((a,x)\in A\times B)\vee((a,x)\in A\times C)$$

$$\equiv(a,x)\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

$\boxed{\text{تمرین ۱۳ ص ۶۸}}$: دو راه: مثلاً یکی از مجموعه‌ها (B) را تهی بگیریم.

یا با مثال عددی:

$A=\{1,2\}$
$B=\{2\}$
$C=\{3,4\}$

$$A\cup(B\times C)=\{1,2,(2,3),(2,4)\}$$

از طرفی دیگر اعضای $(A\cup B)\times(A\cup C)$ همگی به شکل زوج مرتب اند پس مساوی نیستند.

۱۳۹۵/۰۳/۰۵

تمرین ۱۵ :

$A=\{1,2\}$ $\quad C=\{2,3\}$

$B=\emptyset$ $\quad D=\{4\}$

$\underbrace{(A\times B)}_{\emptyset}\cup(C\times D)=\{(2,4),(3,4)\}$ $\quad A\cup C=\{1,2,3\}$

$B\cup D=\{4\}$

$(A\cup C)\times(B\cup D)=\{(1,4)(2,4)(3,4)\}$ ✗ رابطه برقرار نیست

تمرین ۱۴ :

$(x,y)\in[(A\times B)\cap(C\times D)]\equiv[(x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(C\times D)]$

$\equiv x\in A\wedge y\in B\wedge x\in C\wedge y\in D$

$\equiv(x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D)\equiv(x\in A\cap C)\wedge(y\in B\cap D)$

$\equiv(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

• قضیه : برای مجموعه های A و B و C ثابت کنید.

$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$ اثبات مستقیم در کتاب هست.

~~اثبات از روش عضو به عضو قضیه قبلی~~ اثبات در ص ۴۹ .

* نکته : اگر $a\in A$ و $x\notin C$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $(a,x)\notin A\times C$
اما عکس آن همیشه درست نیست یعنی اگر $(a,x)\notin A\times C$ نمی‌توان نتیجه گرفت
$a\in A$ و $x\notin C$. پس قاعدتاً رابطه‌ی (*) باید استلزام باشد
نه هم ارزی اما در اینجا هم ارزی کاملاً درست است. چون می دانیم
$a\in A$ پس برعکس اثبات هم برقرار است.

(*) رابطه‌ای [illegible] است

• رابطه: به هر زیر مجموعه از $A\times B$ یک رابطه از A
۱۳۹۵/۰۳/۰۶
در B گوییم و آن را معمولاً با R نشان می‌دهیم. اگر $(a,b)\in R$ و معمولاً می‌نویسیم aRb و می‌گوییم a توسط R با b در رابطه است.

مثال: فرض کنید $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{a,b\}$ آن‌گاه

$A\times B=\{(1,a)(2,a)\dots(5,a)(1,b)(2,b)\dots(5,b)\}$

هر زیر مجموعه از $A\times B$ یک رابطه است مثلاً

$R_1=\emptyset$

$R_2=\{(1,a)(2,a)\dots(5,a)\}$

$R_3=\cancel{\{(1,b)(2,b)\dots(5,b)\}}\{(1,a)\ (2,b)\}$

$R_4=A\times B$

طبق رابطه‌ی R_1 هیچ یک از اعضای A با هیچ یک از اعضای B در رابطه نیستند. طبق R_4 همه‌ی اعضای A با اعضای B در رابطه هستند.

نکته: در بسیاری از موارد $B=A$ است و رابطه برروی
۱۳۹۵/۰۳/۰۷
آن‌ها A و به صورت زیر مجموعه‌ای از $A\times A$ تعریف می‌شود.

• تعریف رابطه‌ی وارون: فرض کنید A و B دو مجموعه که لزوماً متمایز نیستند باشند و R رابطه‌ای از A در B باشد، وارون رابطه R را با R^{-1} نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$R^{-1}=\{(b,a)\in B\times A\mid (a,b)\in R\}$

۱۳۹۵/۰۳/۰۸

با این تعریف مشخص است که R^{-1} رابطه‌ای از B در A است و درواقع R^{-1} زیرمجموعه‌ای از $B\times A$ خواهد بود.

مثال: معکوس روابط R_1 تا R_4 مثال قبل را بنویسید.

$R_1^{-1}=\varnothing$

$R_2^{-1}=\{(a,1)(a,2)\cdots(a,5)\}$

$R_3^{-1}=\{(a,1),(b,1)\}$

$R_4^{-1}=B\times A$

- هر چهار رابطهٔ بالا روابطی از B در A هستند.
- اگر R رابطه باشد $R^{-1}=\{(a,b)|(a,b)\in R\}$

ثابت کنید برای روابط دلخواه R و S:

$\bigstar\ (R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

حل) $(a,b)\in(R\cup S)^{-1}\equiv(b,a)\in(R\cup S)\equiv(b,a)\in R\vee(b,a)\in S$

$\equiv(a,b)\in R^{-1}\vee(a,b)\in S^{-1}\equiv(a,b)\in(R^{-1}\cup S^{-1})$

تعریف: فرض کنید R رابطه‌ی دلخواه (از A در B) باشد دامنه و نگارهٔ این رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$Dom(R)=\{a\in A\,|\,aRb\,;$ برای حداقل یک $b\in B\}$

$Im(R)=\{b\in B\,|\,aRb\,;\,a\in A$ برای حداقل یک $\}$

مثال: فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{a,b,c,d\}$

$R_1=\varnothing\Rightarrow Dom(R_1)=\varnothing$
$Im(R_1)=\varnothing$

$R_2=\{(1,a),(2,b)(1,b)(1,c)\}$

~~$R_3=A\times B$~~ $Dom(R_2)=\{1,2\}$
$Im(R_2)=\{a,b,c\}$

$R_3=A\times B$

$Dom(R_3)=\{1,2,3,4\}$

$Im(R_3)=\{a,b,c,d\}$

تعریف: فرض کنید R رابطه ای در مجموعه ی X باشد،
۱۳۹۵/۰۳/۰۹

i) R را انعکاسی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ ، xRx

ii) R را متقارن گوییم هرگاه برای هر $a,b \in X$ ، $aRb \Rightarrow bRa$

iii) R را متعدی گوییم هرگاه برای هر $a,b,c \in X$ ،
$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

iv) R را هم ارزی گوییم هرگاه رابطه ی انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

E: فرض کنید $X = \{1,2,3,4,5\}$

$R_1 = \emptyset$

$R_2 = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)\}$

$R_3 = \{(1,2)(2,1)(3,1)(3,2)\}$ $\quad R_4 = X \times X$

R_1 انعکاسی نیست (زیرا مثلاً $(1,1) \notin R_1$). متقارن است زیرا در رابطه ی $\emptyset$ هیچ دو عضوی باهم در رابطه نیستند پس aR_1b یک گزاره ی همواره دروغ است و به انتفاع مقدم $aR_1b \to bR_1a$ یک گزاره ی همیشه R_1 متعدی است زیرا $aR_1b \wedge bR_1c$ همواره دروغ است و به انتفاع مقدم گزاره ی مربوط به تعدی R_1 یک استلزام است.

R_2 انعکاسی است متقارن و متعدی است پس یک هم ارزی است.

R_3 انعکاسی نیست (زیرا $(1,1) \notin R_3$). متقارن نیست زیرا $3R_31$ ولی $1 \not R_3 3$. متعدی نیست زیرا $1R_32$ و $2R_31$ اما $1 \not R_3 1$.

R_4 یک رابطه ی هم ارزی است.

۱۳۹۵/۰۳/۱۰

مثال: فرض کنید $X=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ رابطه $\sim$ در X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $\forall (a,b),(c,d)\in X:$

$$(a,b)\sim(c,d) \iff ad=bc$$

ثابت کنید "$\sim$" یک رابطه است.

حل) برای این که ثابت کنیم انعکاسی است باید نشان دهیم برای هر $(a,b)\in X$، $(a,b)\sim(a,b)$ که آن هم معادل است با $ab=ba$

از آن جا که همواره $ab=ba$ پس همواره $(a,b)\sim(a,b)$. برای متقارن بودن باید ثابت کنیم:

$$(a,b)\sim(c,d)\Rightarrow(c,d)\sim(a,b)$$

سمت چپ $\iff ad=bc \iff bc=ad \iff cb=da \iff (c,d)\sim(a,b)$

برای متعدی باید ثابت کنیم.

$$(a,b)\sim(c,d)\wedge(c,d)\sim(e,f)\Rightarrow(a,b)\sim(e,f)$$

$(a,b)\sim(c,d)\iff ad=bc$ ①

$(c,d)\sim(e,f)\iff cf=de$ ②

$① \wedge ② \Rightarrow a\cancel{d}\cancel{c}f=b\cancel{c}\cancel{d}e \iff af=be \iff (a,b)\sim(e,f)$

$c\neq 0$

نکته: در رابطه‌ی بالا از آن جا که $b,d,f\in\mathbb{Z}-\{0\}$ پس d را می‌توان از دو طرف رابطه‌ی بالا حذف کرد و به نتیجه تعدی رسید. اما برای $c=0$ باید مجدداً رابطه‌ی تعدی را اثبات کنیم.

اگر $c=0$ باید ثابت کنیم.

$$(a,b)\sim(0,d)\wedge(0,d)\sim(e,f)\Rightarrow(a,b)\sim(e,f)$$

۱۳۹۵/۰۳/۱۱

از آنجا که $d\in\mathbb{Z}-\{0\}$ پس $d\neq 0$ و از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود.
$a=0 \wedge e=0$

با این شرایط همواره $(\underset{0}{a},b)\sim(\underset{0}{e},f)$

تعریف: فرض کنید $m\in\mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد برای هر $x,y\in\mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم

$$x\overset{m}{\equiv}y \iff x-y=km$$

که $k\in\mathbb{Z}$

مثلاً $3\overset{5}{\equiv}13$ زیرا $3-13=10=\overset{k}{2}\times 5$

اگر $x\overset{m}{\equiv}y$ گوییم هم‌نهشتی y به x در پیمانه‌ی m.

مثال: ثابت کنید رابطه هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m یک رابطه هم‌ارزی در $\mathbb{Z}$ است.

(solution) برای انعکاسی باید ثابت کنیم برای هر $x\in\mathbb{Z}$، $x\overset{m}{\equiv}x$.

$$x\overset{m}{\equiv}x \iff x-x=km$$

که $k\in\mathbb{Z}$. با در نظر گرفتن $k=0$ نتیجه می‌شود $x\overset{m}{\equiv}x$.

برای تقارن باید ثابت کنیم برای هر $x,y\in\mathbb{Z}$

$$x\overset{m}{\equiv}y \Rightarrow y\overset{m}{\equiv}x$$

سمت چپ $\iff x-y=km \iff y-x=\underbrace{(-k)}_{k\in\mathbb{Z}}.m \iff y\overset{m}{\equiv}x$

در رابطه‌ی بالا از آن جا که $k\in\mathbb{Z}$ نتیجه می‌شود $-k\in\mathbb{Z}$

۱۳۹۵/۰۳/۱۲

برای اثبات تعدی باید ثابت کنیم

$x \overset{m}{\equiv} y \wedge y \overset{m}{\equiv} z \Rightarrow x \overset{m}{\equiv} z$

$x \overset{m}{\equiv} y \Leftrightarrow x - y = k_1 m$ ①

$y \overset{m}{\equiv} z \Leftrightarrow y - z = k_2 m$ ②

$①, ② \Rightarrow x - z = (x-y) + (y-z) = k_1 m + k_2 m = \underbrace{(k_1 + k_2)}\, m$

از آن جا که $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ پس $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x \overset{m}{\equiv} z$.

تعریف: فرض کنید X مجموعه ای دلخواه باشد. رابطه ی قطری Δ_X بر روی X به صورت زیر تعریف می شود.

$\Delta_x = \{(x,x) \mid x \in X\}$

Δ_x یک رابطه ی هم ارزی روی X است. در واقع Δ_X کوچکترین رابطه هم ارزی روی X است.

۹۵/۹/۷

تمرین ۱۶ ص ۷۳ : برای اثبات متقارن بودن $R \cap R^{-1}$

باید ثابت کنیم اگر $(a,b) \in R \cap R^{-1}$ آن گاه $(b,a) \in R \cap R^{-1}$.

$(a,b) \in R \cap R^{-1} \equiv (a,b) \in R \wedge (a,b) \in R^{-1} \equiv (b,a) \in R^{-1} \wedge (b,a) \in R$

$\equiv (b,a) \in R^{-1} \cap R$

پس چون $R^{-1} \cap R \equiv R \cap R^{-1}$ رابطه ثابت شد.

حال فرض کنیم S رابطه ای متقارن و $S \subseteq R$. باید ثابت کنیم $S \subseteq R \cap R^{-1}$

$(a,b) \in S \overset{S \subseteq R}{\Longrightarrow} (a,b) \in R$ ①

$(a,b) \in S \underset{S}{\equiv} (b,a) \in S \overset{S \subseteq R}{\Longrightarrow} (b,a) \in R \equiv (a,b) \in R^{-1}$ ②

۱۳ خرداد ۱۴۳۷ شعبان ۲۶ 2016 2 June

۱۳۹۵/۰۳/۱۳

قیاس ذوالوجهین موجب ① و ②: $(a,b)\in S \wedge (a,b)\in S \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)\in R \wedge (a,b)\notin R^{-1}$ $\quad (a,b)\in S \Rightarrow (a,b)\in R\cap R^{-1}$

یعنی $S\subseteq R\cap R^{-1}$

$\boxed{\text{تمرین ۱۵ ص ۷۲}}$: متقارن بودن $R\cup R^{-1}$ کاملاً

مشابه مسئله‌ی قبل ثابت می شود. حال فرض کنیم S رابطه‌ای متقارن باشد باید ثابت کنیم

$S\supseteq R \Rightarrow S\supseteq R\cup R^{-1}$

پس فرض می کنیم $S\supseteq R$.

فرض: $(a,b)\in R \xrightarrow{S\supseteq R} (a,b)\in S$ ①

فرض: $(a,b)\in R^{-1} \equiv (b,a)\in R \xrightarrow{R\subseteq S} (b,a)\in S \xrightarrow{\text{متقارن}} (a,b)\in S$ ②

① و ② و قیاس ذوالوجهین موجب $(a,b)\in R \vee (a,b)\in R^{-1} \Rightarrow (a,b)\in S \vee (a,b)\in S$

$\Rightarrow (a,b)\in R\cup R^{-1} \Rightarrow (a,b)\in S$

که معادل است با $R\cup R^{-1}\subseteq S$

۱۴ خرداد شعبان ۲۷ 3 June

$\boxed{\text{تمرین ۱۶ ص ۷۲}}$

۱۳۹۵/۰۳/۱۴

مفهوم تحدید: مثال: فرض کنید $A=\{x,y,z,k,t\}$ و

$B=\{1,2,3,4\}$ و رابطه‌ی R از A در B به شکل زیر باشد.

$R=\{(x,2)(x,4)(y,3)(z,1)(y,1)(k,3)(t,2)(t,3)\}$

اگر $D=\{x,z,t\}$ مطلوب است محاسبه $R|D$.

$R|D:\{(x,2)(x,4)(z,1)(t,2)(t,3)\}$

۱۳۹۵/۰۳/۱۵

$$(a,b)\in R|D \equiv (a,b)\in R \wedge a\in D$$

$$\overset{(*)}{\equiv} (a,b)\in R \wedge b\in Im(R) \wedge a\in D \equiv$$

$$\equiv (a,b)\in R \wedge (a\in D \wedge b\in Im(R))$$

$$\equiv (a,b)\in R \wedge ((a,b)\in D\times Im(R))$$

$$\equiv (a,b)\in R\cap (D\times Im(R))$$

در هم‌ارزی (*) توجه کنید که با دانستن $(a,b)\in R$ نتیجه می‌شود $b\in Im(R)$ یعنی $b\in Im(R)$ یک راستگوست و می‌توان از قاعده‌ی $p\equiv p\wedge t$ استفاده کرد.

$\boxed{\text{تمرین ۱۱ ص ۷۲}}$ (الف)

$$(x,y)\in(R|D\cup E)\equiv(x,y)\in R\wedge(x\in D\cup E)$$

$$\equiv((x,y)\in R)\wedge(x\in D\vee x\in E)\equiv((x,y)\in R\wedge x\in D)\vee((x,y)\in R\wedge x\in E)$$

$$\equiv((x,y)\in R|D)\vee((x,y)\in R|E)\equiv(x,y)\in(R|D\cup R|E)$$

۷,۹,

• افراز یک مجموعه: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. منظور از یک افراز روی مجموعه‌ی X، مجموعه‌ای است مانند P که اعضای آن زیرمجموعه‌ی ناتهیِ X هستند و

i) اگر $A,B\in P$ و $A\neq B$ آنگاه $A\cap B=\emptyset$

ii) $\bigcup_{C\in P} C = X$

مثال: فرض کنید $X=[0,1]$ تعریف می‌کنیم.

۱۳۹۵/۰۳/۱۶

$X_1=[0,\frac{1}{4})$ $\quad X_2=[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ $\quad X_3=[\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

$X_4=[\frac{3}{4},1)$ $\quad X_5=\{1\}$ $\quad P=\{X_1,X_2,\dots,X_5\}$

با این تعریف P یک افراز از مجموعه X است.

نکته: اگر در مثال بالا X_1 تا X_5 به همان ترتیب تعریف شوند و $X_6=\emptyset$ را در کنار آن‌ها تعریف می‌کنیم آن‌گاه $\{X_1,\dots,X_6\}$ یک افراز X نخواهد بود.

مثال: یک افراز از مجموعه $\mathbb{Z}$ می‌تواند به صورت زیر باشد.

$\mathbb{Z}_1=\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $\qquad \mathbb{Z}_3=\{3k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}_2=\{3k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

با این تعریف $P=\{\mathbb{Z}_1,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3\}$ یک افراز از مجموعه $\mathbb{Z}$ خواهد بود.

در حالت کلی از $m\in\mathbb{N}$ آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$\mathbb{Z}_j=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=km+j\}$ $\qquad j=0,1,\dots,m-1$

با این تعریف $\{\mathbb{Z}_0,\mathbb{Z}_1,\dots,\mathbb{Z}_{m-1}\}$ یک افراز از مجموعه $\mathbb{Z}$ خواهد بود.

۱۳۹۵/۰۳/۱۷

یاد آوری: افراز مجموعه X: مجموعه‌ای است شامل زیر مجموعه های ناتهی X به قسمی که اشتراک هر دوتای آن ها تهی باشد و اجتماع همه‌ی آن ها X باشد.

تعریف: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و ε رابطه‌ای هم‌ارزی روی X باشد. برای هر $x\in X$ رده‌ی هم‌ارزی x به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x/\varepsilon = \{y\in X \mid x\,\varepsilon\, y\}$$

مجموعه‌ی همه‌ی این رده های هم‌ارزی را با X/ε نشان می‌دهیم.

در واقع

$$X/\varepsilon = \{x/\varepsilon \mid x\in X\}$$

مثال: فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ و رابطه‌ی هم‌ارزی ε به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\varepsilon=\{(1,1)(2,2)\dots(6,6)(1,2)(2,1)(1,3)(3,1)(2,3)(3,2)(4,6)(6,4)\}$$

برای هر $x\in X$ مطلوب است محاسبه‌ی x/ε و سپس X/ε.

یعنی زوج مرتب $(1,y)$ در ε باشد.

$1/\varepsilon=\{y\in X \mid 1\,\varepsilon\, y\}=\{1,2,3\}$ — رده‌ی هم‌ارزی ۱

$2/\varepsilon=\{y\in X \mid 2\,\varepsilon\, y\}=\{2,1,3\}$ — " " ۲

$3/\varepsilon=\{y\in X \mid 3\,\varepsilon\, y\}=\{3,1,2\}$ — ⋮

$4/\varepsilon=\{y\in X \mid 4\,\varepsilon\, y\}=\{4,6\}$

$5/\varepsilon=\{y\in X \mid 5\,\varepsilon\, y\}=\{5\}$

$6/\varepsilon=\{y\in X \mid 6\,\varepsilon\, y\}=\{6,4\}$

$X/\varepsilon=\{x/\varepsilon \mid x\in X\}=\{\{1,2,3\},\{4,6\}\{5\}\}$ کلاس هم‌ارزی

قضیه: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و ε یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد. برای هر x و $y \in X$:

۱۳۹۵/۰۳/۱۸

i) x/ε زیرمجموعه‌ی ناتهی X است.

ii) $x/\varepsilon \cap y/\varepsilon \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر $x \varepsilon y$

iii) $x \varepsilon y$ اگر و تنها اگر $x/\varepsilon = y/\varepsilon$.

اثبات) (i) طبق تعریف $x/\varepsilon = \{y \in X \mid x \varepsilon y\}$.

اعضای مجموعه‌ی بالا همگی از X انتخاب می‌شوند پس زیرمجموعه X هستند. از طرف دیگر ε رابطه‌ای هم ارزی است. پس همواره $x \varepsilon x$ یعنی $x \in x/\varepsilon$ یعنی x/ε مجموعه‌ای است ناتهی.

(ii) ابتدا فرض کنیم $x \varepsilon y$، باید ثابت کنیم $x/\varepsilon \cap y/\varepsilon \neq \emptyset$.
می‌دانیم که $y \in y/\varepsilon$. از طرف دیگر چون $x \varepsilon y$ پس $y \in x/\varepsilon$، بنابراین $y \in x/\varepsilon \cap y/\varepsilon$ یعنی $x/\varepsilon \cap y/\varepsilon \neq \emptyset$.
برعکس، فرض کنیم $x/\varepsilon \cap y/\varepsilon \neq \emptyset$ باید ثابت کنیم $x \varepsilon y$.

$$x/\varepsilon \cap y/\varepsilon \neq \emptyset \equiv \exists z \in X,\ z \in x/\varepsilon \wedge z \in y/\varepsilon.$$

$$\equiv \exists z \in X : x \varepsilon z \wedge y \varepsilon z \underset{\varepsilon\ \text{هم ارزی}}{\equiv} \exists z \in X : z \varepsilon x \wedge z \varepsilon y \Rightarrow$$

$\xRightarrow{\text{تعدی}} x \varepsilon y$. ثابت شد.

(iii) چون x/ε و y/ε هردو مجموعه‌های ناتهی هستند از $x/\varepsilon = y/\varepsilon$ نتیجه می‌شود $x/\varepsilon \cap y/\varepsilon \neq \emptyset$ و طبق قسمت (ii) نتیجه می‌شود $x \varepsilon y$. برعکس، باید ثابت کنیم اگر $x \varepsilon y$ آنگاه $y/\varepsilon = x/\varepsilon$.

$$z \in x/\varepsilon \equiv x \varepsilon z \equiv x \varepsilon z \wedge \overset{+\,*}{x \varepsilon y} \underset{\varepsilon\ \text{هم ارزی}}{\equiv} z \varepsilon x \wedge x \varepsilon y \xRightarrow{\text{تعدی}} z \varepsilon y$$

$$\equiv z \in y/\varepsilon$$

چشم جادوی تو خود عین سواد سحر است
لیکن این هست که این نسخه سقیم افتادست

$+\ P \equiv P \wedge +$

★ نتیجه: از ii و iii قضیه‌ی بالا، نتیجه می‌شود ۱۳۹۵/۰۳/۱۹

$$x\varepsilon y \equiv x/_{\varepsilon} \cap y/_{\varepsilon} \neq \emptyset \equiv x/_{\varepsilon} = y/_{\varepsilon}$$

یعنی هر سه گزاره‌ی بالا معادل هم دیگر هستند.

قضیه: اگر ε رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی ناتهی X باشد. آن‌گاه $X/_{\varepsilon}$ یک افراز مجموعه X است.

اثبات: در قضیه‌ی قبل ثابت کردیم اعضای $X/_{\varepsilon}$ زیرمجموعه‌های ناتهی X هستند. لذا کافی است ثابت کنیم اشتراک هر دو عضو متمایز $X/_{\varepsilon}$ تهی است و اجتماع همه‌ی آن‌ها مجموعه‌ی X است.

فرض کنیم $y/_{\varepsilon} \in X/_{\varepsilon}$ و $x/_{\varepsilon}$. باید ثابت کنیم

$$x/_{\varepsilon} \neq y/_{\varepsilon} \Rightarrow x/_{\varepsilon} \cap y/_{\varepsilon} = \emptyset$$

به طور معادل از قانون عکس نقیض ثابت می‌کنیم

$$x/_{\varepsilon} \cap y/_{\varepsilon} \neq \Rightarrow x/_{\varepsilon} = y/_{\varepsilon}.$$

گزاره‌ی بالا در نتیجه‌ی قبل از این قضیه ثابت شده است.

نهایتاً برای هر $x \in X$ چون ε هم‌ارزی است داریم $x \in x/_{\varepsilon}$ یعنی هر عضو مجموعه‌ی X به یکی از اعضای $X/_{\varepsilon}$ تعلق دارد.

یعنی اجتماع همه‌ی اعضای $X/_{\varepsilon}$ مجموعه‌ی X را شامل می‌شود.

۱۳۹۵/۰۳/۲۰

تعریف-۲: فرض کنید P یک افراز مجموعه ناتهی X باشد.
رابطه‌ی $R = X/P$ روی X را بدین صورت تعریف می‌کنیم
که برای هر $x,y \in X$ ، xRy اگر و تنها اگر $A \in P$
باشد که $x,y \in A$

مثال: مجموعه‌ی $X = \{1,2,...,7\}$ و افراز زیر را در نظر بگیرید.

$$P = \{\{1\}\{2,5,7\}\{3,6\}\{4\}\}$$

رابطه‌ی X/P برای این افراز محاسبه نمایید.

$$X/P = \{(1,1)\ (2,2)(2,5)\ (2,7)(5,2)(5,5)\ (5,7)\ (7,2)\ (7,5)(7,7)\ (3,3)(3,6)\ (6,3)(6,6)\ (4,4)\}$$

مثال: افراز $P = \{Z_e , Z_o\}$ از Z را در نظر بگیرید که Z مجموعه اعداد صحیح
Z_e مجموعه اعداد صحیح زوج و Z_o مجموعه اعداد صحیح فرد. رابطه‌ی Z/P
معادل با این افراز را بنویسید. ص بعد.

یادداشت ~~روز صنایع دستی - شهادت آیت الله سعیدی به دست مأموران ستم شاهی پهلوی (۱۳۴۹ هـ ش)~~

۱۳۹۵/۰۳/۲۱

۱۳۹۵/۰۳/۲۲

هر دو عدد صحیح x و y با هم در رابطه‌اند اگر هر دو متعلق به $\mathbb{Z}_e$ باشند یا هر دو متعلق به $\mathbb{Z}_o$. به عبارت دیگر $x\underbrace{(\mathbb{Z}/p)}_{R}y$ اگر و تنها اگر هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. به عبارت دیگر

$$\mathbb{Z}_p=\{(x,y)\mid |x|-|y|=2K\ ;\ K\in\mathbb{Z}\}$$

* نمادهای این کنش: {//

ε و R : رابطه

P : افراز

x/ε : مجموعه‌ی همه‌ی y هایی است که با x در رابطه‌اند.

X/ε : یک افراز است (مجموعه‌ی همه‌ی x/ε هاست)

X/P : یک رابطه است. //}

قضیه: فرض کنید P یک افراز از مجموعه‌ی ناتهی X باشد در این صورت رابطه $R=X/P$ یک رابطه هم‌ارزی روی X است. هم‌چنین مجموعه همه‌ی رده‌های هم‌ارزی x/R که $R=X/P$ همان افراز P خواهد بود. به عبارت دیگر $X/(X/P)=P$.

اثبات: فرض کنیم $R=X/P$. باید ثابت کنیم

۱- برای هر $x\in X$ ، xRx . چون P یک افراز است پس شامل زیرمجموعه‌های ناتهی X است که اشتراک هر دوتای آن‌ها تهی است. پس $x\in X$ فقط و فقط به یکی از اعضای P تعلق دارد یعنی $x\in A$ است و طبق تعریف 2 ، xRx

۱۳۹۵/۰۳/۲۳

۲- برای هر $x,y\in X$ اگر xRy آن‌گاه yRx. از xRy نتیجه می‌شود $A\in P$ وجود دارد به قسمی که $x,y\in A$. مستقیما نتیجه می‌شود yRx.

۳- اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz.

از xRy نتیجه می‌شود $A_1\in P$ هست که $x,y\in A_1$. از yRz نتیجه می‌شود که $A_2\in P$ هست که $y,z\in A_2$. از طرفی اشتراک هر دو عضو متمایز P تهی است. لذا از $y\in A_1$ و $y\in A_2$ نتیجه می‌شود $A_1=A_2$. به عبارت دیگر هر سه عضو $x,y,z\in X$ به یک عضو از افراز P مانند A تعلق دارند لذا از $x,y\in A$ نتیجه می‌شود xRz.

ادامه‌ی اثبات: فرض کنیم $R=X/P$. در واقع R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. باید ثابت کنیم با این رابطه، $X/R=P$. اعضای X/R به شکل x/R هستند که $x\in X$. فرض کنیم $x/R\in X/R$ (باید ثابت کنیم $x/R\in P$) از آن‌جا که $x\in X$ و P یک افراز از مجموعه‌ی X است پس دقیقا یک $A\in P$ هست که $x\in A$. از طرف دیگر طبق تعریف رابطه‌ی $R=X/P$، yهایی به x/R تعلق دارند که همگی به انضمام x در یک مجموعه (مانند A) وجود داشته باشند. در واقع از آن‌جا که $x\in A$ پس yهایی که متعلق به A هستند به x/R تعلق دارند یعنی $A=x/R$

و هیچ عضو دیگری در x/R وجود ندارد.

و از آن‌جا که $A\in P$ پس $x/R\in P$

۲۴ خرداد ۱۴۳۷ رمضان ۷ 2016 13 June

برعکس، باید ثابت کنیم هر عضو P یک عضو از X/R است

۱۳۹۵/۰۳/۲۴

فرض کنیم $A\in P$. طبق تعریف افراز $A\neq\emptyset$. پس $x\in A$ وجود خواهد داشت. از طرف دیگر $x\in x/R$ (که $R=X/P$) و نیز هر y متعلق به A هم به x/R تعلق دارد(*) پس در واقع $A=x/R$.

و چون $x/R\in X/R$ پس $A\in X/R$

(*) توضیح: زیرا طبق رابطه‌ی $R=X/P$، yهایی با x در رابطه اند که هر دو به یک مجموعه از افراز P تعلق داشته باشند. یعنی همه‌ی yهای متعلق به A که با x در رابطه اند. و هیچ y دیگری نیز با x در رابطه نخواهد بود.

تمرین ۹ ص ۷۷:

حل الف) مشابها حل شده.

ب) اعضای $X/\mathcal{E}$ به شکل $x/\mathcal{E}$ هستند که $x\in X=\mathbb{Z}$

طبق تعریف:

$$x/\mathcal{E}=\{y\in\mathbb{Z}\mid x\mathcal{E}y\}=\{y\in\mathbb{Z}\mid x-y=5k\}$$

$$=\{y\in\mathbb{Z}\mid x-y=-5\underbrace{(-k)}_{k'}\}=\{y\in\mathbb{Z}\mid y=5k'+x\}$$

طبق تعریف بالا رده های هم ارزی $0/\mathcal{E}$، $1/\mathcal{E}$، ...، $4/\mathcal{E}$ رده های هم ارزی متمایز از افراز $X/\mathcal{E}$ خواهد بود.

$$Z_0=0/\mathcal{E}=\{y\in\mathbb{Z}\mid y=5k'\}=\{\dots,-15,-10,-5,0,5,10,15,\dots\}$$

$$Z_1=1/\mathcal{E}=\{y\in\mathbb{Z}\mid y=5k'+1\}=\{\dots,-9,\dots,-4,\dots,1,6,11,\dots\}$$

$$Z_2=2/\mathcal{E}=\{y\in\mathbb{Z}\mid y=5k'+2\}=\{\dots,-8,-3,2,7,\dots\}$$

$\mathbb{Z}_3=\{\dots,-7,-2,3,8,\dots\}$

$\mathbb{Z}_4=\{\dots,-6,-1,4,9,14,\dots\}$

توجه کنید که $\mathbb{Z}_5=\mathbb{Z}_0$ ، $\mathbb{Z}_1=\mathbb{Z}_6$ و ...

با داشتن مجموعه های بالا $X/_{\mathcal{E}}=\{\mathbb{Z}_0,\mathbb{Z}_1,\dots,\mathbb{Z}_4\}$ یک افراز از $X=\mathbb{Z}$ خواهد بود.

ج) فرض کنیم $X/_{\mathcal{E}}=P$. افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به شکل بالا باشد. می خواهیم ثابت کنیم $X/_P=\mathcal{E}$. طبق این رابطه x و y هایی با هم در ارتباط هستند که هردو متعلق به یک مجموعه از P باشند یعنی x و y هردو متعلق به $\mathbb{Z}_0$ باشند یا هردو متعلق به $\mathbb{Z}_1$ یا ... یا هردو متعلق به $\mathbb{Z}_4$. فرض کنید $X/_P=R$ ثابت می کنیم $R=\mathcal{E}$. اگر xRy آن گاه طبق توضیحات بالا یکی از ۵ اتفاقات زیر افتاده است.

۱ـ x و y هر دو متعلق به $\mathbb{Z}_0$ اند یعنی $x=5k'$ و $y=5k''$. با این شرایط

$x-y=5(k'-k'')=5k$

پس طبق تعریف $\mathcal{E}$ داریم $x\mathcal{E}y$.

2ـ x و y هردو متعلق به $\mathbb{Z}_1$ پس $x=5k'+1$ و $y=5k''+1$. پس

$x-y=5(k'-k'')+1-1=5k$

یعنی در این حالت نیز $x\mathcal{E}y$.

در سه حالت باقی مانده نیز اتفاق بالا رخ خواهد داد یعنی اگر $R=X/_P$ آن گاه xRy معادل $x\mathcal{E}y$ است یعنی $R=\mathcal{E}$.

۱۳۹۵/۰۳/۲۶

تمرین ۱۱ ص ۷۷: فرض کنید ε رابطه‌ی هم ارزی روی X باشد ثابت کنید $X/_{X/\varepsilon} = \varepsilon$.

فرض کنید $X/\varepsilon = P$. بنابراین رابطه‌ی X/P ، x و y هایی را باهم رابطه می‌دهد که هر دو متعلق به یک $A\in P$ باشند. X/P یک رابطه است پس اعضای آن به صورت (x,y) خواهد بود.

$$(x,y)\in X/P \equiv \exists A\in P \; ; \; x\in A \; ; \; y\in A \qquad (*)$$

از طرف دیگر چون افراز $P = X/\varepsilon$ توسط رابطه‌ی ε به وجود آمده پس $A\in P$ معادل آن است که $A = C/\varepsilon$ که $c\in X$. پس

$$(*) \equiv \exists\, C/\varepsilon \; ; \; x\in C/\varepsilon \; , \; y\in C/\varepsilon$$

طبق قضیه‌ی جلسه‌ی قبل (اگر $t,z\in x/\varepsilon$ آنگاه $t\varepsilon z$)
پس رابطه‌ی بالا معادل است با $x\varepsilon y$

تابع:

یادآوری: فرض کنید R رابطه‌ای از A به B باشد

$Dom(R) = \{a\in A \mid aRb$ برای حداقل یک $b\in B\}$ حوزه مقادیر

$Im(R) = \{b\in B \mid aRb$ برای حداقل یک $a\in A\}$ نگاره R

توجه کنید که برای هر رابطه‌ی دلخواه R لزوماً $Dom(R)$ مساوی A نیست (مانند رابطه‌ی تهی که حوزه‌ی مقادیر آن $\emptyset$ است)

۱۳۹۵/۰۳/۲۷

تعریف: فرض کنید X و Y مجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع f
از X به Y رابطه‌ای است از X در Y به قسمی که

1- $Dom(f) = X$

2- اگر $(x,y) \in f$ و $(x,z) \in f$ آن‌گاه $y = z$

به عبارت عامیانه رابطه‌ی f از X به Y یک تابع است اگر و تنها اگر
هر $x \in X$ دقیقاً یک بار به عنوان مولفه‌ی اول در این رابطه ظاهر شده
باشد.

مثال: فرض کنید $X = \{1,2,3,4,5\}$ $Y = \{1,2,3,\dots\}$

$f_1 = \{(1,1),(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)\}$

$f_2 = \{(1,1)(2,1)(3,1)(4,1)(5,1)\}$

$f_3 = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$

$f_4 = \{(1,1)(2,3)(3,5)(4,9)(5,20)(3,17)\}$

هر ۴ مجموعه‌ی بالا از X در Y هستند روابط f_1 و f_2 ~~رابطه‌اند~~
تابع اند زیرا هردو شرط تعریف بالا را دارند. و f_3 تابع نیست

۱۳۹۵/۰۳/۲۸

زیرا $Dom(f_3) = \{1,2,3\} \neq X$

و f_4 نیز تابع نیست چون $(3,5) \in f_4$ و $(3,17) \in f_4$ و $5 \neq 17$

نکته: اگر f یک تابع باشد آن‌گاه به‌جای $(x,y) \in f$ می‌توان نوشت
$y = f(x)$. همچنین تابع f از X به Y را به صورت $f: X \to Y$ نشان می‌دهیم

۱۳۹۵/۰۳/۲۹

تعریف: اگر f تابعی از X به Y باشد و $y=f(x)$. آن‌گاه y را نگاره‌ی x تحت f گوییم و x را پیش‌نگاره‌ی y تحت f می‌نامیم.

فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^2+5$ در این صورت:

$Dom(f)=\mathbb{R}$

$Im(f)=[5,+\infty)$

نکته: اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد آن‌گاه هر تغییر حتی کوچک در حوزه‌ی مقادیر f (یعنی X) از تابع بالا یک تابع جدید خواهد ساخت. مثلاً در مثال قبل، اگر $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-5$ آن‌گاه این تابع مجزای از تابع مثال قبل خواهد بود.

اما مجموعه Y را می‌توان تحت شرایطی تغییر داد و f کماکان به صورت یک تابع باقی بماند. مثلاً تابع مثال قبل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$f(x)=x^2+5$

یا $f: \mathbb{R} \to [3,+\infty)$
$f(x)=x^2+5$

قضیه: فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع و W مجموعه‌ای شامل نگاره‌ی f است. (یعنی $Im(f) \subseteq W$) آن‌گاه $f: X \to W$ نیز یک تابع خواهد بود.

۱۳۹۵/۰۳/۳۰

اثبات: باید ثابت کنیم $f: X \to W$ یک رابطه از X در W است. بدین منظور

$(x,y)\in f \equiv y=f(x)$ و $y\in W$

$\equiv x\in X, y=f(x)$ و $y\in W \Rightarrow (x,y)\in X\times W$

بنابراین $f\subseteq X\times W$ یعنی f رابطه‌ای از X به W است

همچنین از آن جا که $f: X\to Y$ طبق فرض یک تابع است پس

$Dom(f)=X$

یعنی در مورد $f: X\to W$ این شرایط صادق است.

نهایتاً در مورد $f: X\to W$ باید ثابت کنیم اگر $(x,y)\in f$ و $(x,z)\in f$ آن‌گاه $y=z$. از آن جا که طبق فرض $f: X\to Y$ تابع است

$y,z\in Im(f)\subseteq Y , x\in Dom(f)$

قضیه: فرض کنید $f: X\to Y$ و $g: X\to Y$ دو تابع باشند

$f=g$ اگر و تنها اگر برای هر $x\in X$، $f(x)=g(x)$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم $f=g$. باید ثابت کنیم $\forall x\in X: f(x)=g(x)$

$y=f(x)\equiv(x,y)\in f \overset{f,g}{\equiv}(x,y)\in g \equiv y=g(x)$

برعکس فرض کنیم برای هر $x\in X$ داریم $f(x)=g(x)$ ثابت می‌کنیم $f=g$.

$(x,y)\in f\equiv y=f(x) \overset{f(z)=g(z)}{\equiv} y=g(x)\equiv(x,y)\in g$

نکته: از قضیه بالا مشخص است که تساوی f و g تنها در حالتی تعریف می‌شود که هردوی آن‌ها توابعی از X به Y باشند

چند تابع ویژه:

۱- تابع مشخصه: فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه و $Y=\{0,1\}$ و $A\subseteq X$. تابع مشخصه‌ی A که با χ_A (خی A) نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_A=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in X-A\end{cases}$$

۲- تابع همانی: رابطه‌ی قطری Δ_X که در بخش قبل تعریف شد تابعی است از X به X.

$$\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$$

این تابع را تابع همانی گوییم و با I_X نشان می‌دهیم. پس

$$I_X:X\to X$$

$$\forall x\in X: I_X(x)=x.$$

3- تابع ثابت: فرض کنید X و Y مجموعه‌های ناتهی و $b\in Y$. تابع $C_b:X\to Y$ را تابع ثابت b گوییم هرگاه

$$C_b=\{(x,b)\mid x\in X\}$$

یا به عبارت دیگر

$$\forall x\in X: C_b(x)=b$$

قضیه: فرض کنید $f:A\to B$ و $g:C\to D$ توابع دلخواهی باشند به قسمی که برای هر $x\in A\cap C$، $f(x)=g(x)$ باشد. اجتماع دو تابع بالا که به صورت $f\cup g:A\cup C\to B\cup D$

$$(f\cup g)(x)\begin{cases}f(x) & x\in A\\ g(x) & x\in C\end{cases}$$

یک تابع از $A\cup C$ به $B\cup D$ است.

$h \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$ یعنی *

اثبات: فرض کنید $h(x) = (f\cup g)(x)$ باید ثابت کنیم:

۱- h رابطه ای از $A\cup C$ در $B\cup D$ * بدین منظور

از آن جا که f تابعی از A به B است پس رابطه از A

در B است یعنی $f\subseteq A\times B$ به ~~طریق~~ طریق مشابه

$g\subseteq C\times D$ بنابراین $h = f\cup g \subseteq (A\times B)\cup(C\times D)$ ①

از طرف دیگر $A\times B \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$

$$\left.\begin{array}{l} A\times B \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D) \\ C\times D \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D) \end{array}\right\} \Rightarrow (A\times B)\cup(C\times D) \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D) \quad ②$$

از ① و ② و قانون تعدی نتیجه می شود $h \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$

۲- باید ثابت کنیم $Dom(h) = A\cup C$ یا به شکل معادل

$$Dom(f\cup g) = A\cup C = Dom(f)\cup Dom(g)$$

بدین منظور:

$$x\in Dom(f\cup g) \equiv \exists\, y\in B\cup D : (f\cup g)(x) = y$$

x بیان شده در رابطه بالا عضوی از $A\cup C$ است. پس یکی از شرایط

زیر را دارد:

i- $x\in A$ و $x\notin C$ در این صورت

$$(f\cup g)(x) = f(x)\in B \Rightarrow y\in B$$

از آن جا که $Dom(f)=A$ پس هر $x\in A$ که $x\notin C$ در حوزه‌ی مقادیر

h وجود دارد. ⓒ پیوست: 11 Dec

نگاره و نگارهٔ وارون یک مجموعه:

۱۳۹۵/۰۴/۰۲

تعریف: فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$.

نگارهٔ A تحت f: $f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x)$ برای حداقل یکی $x \in A\}$

نگارهٔ وارون B تحت f: $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$

مثال: فرض کنید $X = \{1, 2, 3 \ldots 6\}$ و $Y = \{x, y, z, k, s, t\}$ و

$f = \{(1, x)(2, x)(3, k)(4, y)(5, y)(6, s)\}$

$A_1 = \{1, 2, 5\} \Longrightarrow f(A_1) = \{x, y\}$

$A_2 = \{3, 4, 5, 6\} \Longrightarrow f(A_2) = \{k, y, s\}$

$A_3 = X \Longrightarrow f(A_3) = f(X) = \{x, y, k, s\}$

$B_1 = \{x, y\} \Longrightarrow f^{-1}(B_1) = \{1, 2, 4, 5\}$

$B_2 = \{z, t\} \Longrightarrow f^{-1}(B_2) = \emptyset$

$B_3 = \{x, y, z, t\} \Longrightarrow f^{-1}(B_3) = \{1, 2, 4, 5\}$

نکته ۱: اگر $f(x) \in f(A)$ همواره نمی‌توان نتیجه گرفت $x \in A$

مثلاً در مثال قبل تعریف می‌کنیم $A = \{2, 3\}$ در این صورت $f(A) = \{x, k\}$

از طرف دیگر $x = f(1) \in f(A)$ اما $1 \notin A$

نکته ۲: طبق تعریف، از $x \in f^{-1}(B)$ نتیجه می‌شود $f(x) \in B$ و برعکس

$$f(x) \in B \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B)$$

نکته ۳: اگر $A_1 = A_2$ آن‌گاه $f(A_1) = f(A_2)$. هم چنین اگر $f(A_1) = f(A_2)$ آن‌گاه $f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(A_2))$

اما از $f(A_1) = f(A_2)$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A_1 = A_2$.

۱۳۹۵/۰۴/۰۳

۳ تیر ۱۴۳۷ رمضان ۱۷ 2016 23 June

مثلاً در مثال قبل

$A_1 = \{1\} \Rightarrow f(A_1) = x$

$A_2 \{1, 2\} \Rightarrow f(A_2) = x$

در این مثال $f(A_1) = f(A_2)$ است اما $A_1 \neq A_2$ است.

نکته ۴: اگر $B_1 = B_2$ آن گاه $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$. هم چنین $f(f^{-1}(B_1)) = f(f^{-1}(B_2))$. اما از $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B_1 = B_2$.

تمرین 5 ص 87: فرض $f: X \to Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. مثال هایی بیاورید که نشان دهد احکام زیر دروغ اند.

حل: الف) $B = \{z, t\} \neq \emptyset \quad f^{-1}(B) = \emptyset$

ب) $A = \{1\} \Rightarrow f(A) = \{x\} \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{x\}) = \{1, 2\}$

ج) $B = \{x, z\} \Rightarrow f^{-1}(B) = \{1, 2\} \Rightarrow f(f^{-1}(B)) = f(\{1, 2\}) = \{x\}$

۴ تیر ۱۳۹۵/۰۴/۰۴ رمضان ۱۸ 24 June

د) تابع بیان شده ~~...~~ در مثال قبل

$f(X) = \{x, y, k, s\} \neq Y$

تمرین ۴ ص 87:

حل: ۱) اگر $x \in A$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $f(x) \in f(A)$

اما عکس این موضوع لزوماً درست نیست. $x \in A \Rightarrow f(x) \in \underbrace{f(A)}_{B} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$

~~$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$~~

$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

۱۳۹۵/۰۴/۰۵

ii) $y\in f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{A}) \Rightarrow \exists x\in A\ ,\ y=f(x)$

$\equiv \exists f(x)\in B\ ,\ y=f(x) \Longrightarrow y\in B$

تمرین ۶: ثابت کنید اگر $f(x)=Y$ آن‌گاه $f(f^{-1}(B))=B$

در مثال بالا ثابت کردیم همواره $f(f^{-1}(B))\subseteq B$. کافی است ثابت کنیم اگر $f(X)=Y$ آن‌گاه $B\subseteq f(f^{-1}(B))$

فرض می‌کنیم $b\in B$. از آن‌جا که $B\subseteq Y$ پس $b\in Y$ و از آن‌جا که $f(X)=Y$ پس $x\in X$ وجود دارد که $f(x)=b$ در واقع از آن‌جا که $f(x)=b$ و $b\in B$ پس لزوماً $x\in f^{-1}(B)$

به زبان گزاره‌ها

$b\in B \Rightarrow \exists x\in f^{-1}(B)\ ,\ b=f(x) \equiv f(x)\in f(f^{-1}(B))$ و $b=f(x)$

$\Rightarrow b\in f(f^{-1}(B))$

قضیه: فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد

i) $f(\emptyset)=\emptyset$

ii) $f(\{x\})=\{f(x)\}$

iii) اگر $A\subseteq B\subseteq X$ آن‌گاه $f(A)\subseteq f(B)\subseteq f(X)$

iv) اگر $C\subseteq D\subseteq Y$ آن‌گاه $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)\subseteq f^{-1}(Y)$

قضیه: فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع و $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد در این صورت

1- $f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

$2-\ f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

اثبات: ۱ـ

$y \in f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \equiv \exists\, x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \ ,\ y \in f(x)$

$\equiv \exists\, \gamma \in \Gamma \ ,\ x \in A_\gamma \ ,\ y = f(x) \equiv \exists\, \gamma \in \Gamma \ ,\ y \in f(A_\gamma)$

$\equiv y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

اثبات ۲ـ

از فصل قبل می دانیم برای هر $\gamma\in\Gamma$ ، $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq A_\gamma$

طبق قضیه ی قبل برای هر $\gamma\in\Gamma$ ، $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq f(A_\gamma)$

از آن جا که این گزاره برای هر $\gamma\in\Gamma$ درست است پس

طبق مطالب فصل قبل $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

مثال ۱۱ ص ۸۶ . خوانده شود

قضیه: فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع و $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده ای از زیرمجموعه های Y باشند.

i) $f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$

ii) $f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$

اثبات ii) $x \in f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \equiv f(x) \in (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \equiv \forall\, \gamma\in\Gamma : f(x) \in B_\gamma$

$\equiv \forall\, \gamma \in\Gamma : x \in f^{-1}(B_\gamma) \equiv x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$

فرض کنید $f:X\to Y$ تابع و B و C زیر مجموعه‌های Y باشند ۱۳۹۵/۰۴/۰۷

در این صورت $f^{-1}(B-C)=f^{-1}(B)-f^{-1}(C)$ اثبات: تمرین داخل کتاب.

۷ تیر دوشنبه ۱۴۳۷ رمضان ۲۱ 2016 27 June

■ توابع یک به یک، دوسوی و پوشش. یک به یک (انژکتیو)

تعریف: تابع $f:X\to Y$ را یک به یک گوییم هرگاه برای هر عضو $x_1,x_2\in X$ اگر $f(x_1)=f(x_2)$ آن‌گاه $x_1=x_2$. تابع یک به یک را انژکسیون گوییم.

نکته: طبق قاعده‌ی عکس نقیض تابع f یک به یک است هرگاه از $x_1\neq x_2$ نتیجه شود $f(x_1)\neq f(x_2)$.

تعریف: تابع $f:X\to Y$ را پوشا یا سورژکتیو گوییم هرگاه برای هر $y\in Y$ حداقل یک $x\in X$ باشد به قسمی که $f(x)=y$. به تابع پوشا، سورژکسیون نیز می‌گویند.

تعریف: تابع $f:X\to Y$ را دو سوی یا بایژکتیو گوییم هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

مثال: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $f(x)=x^2$ یک به یک نیست. مثلاً $f(1)=f(-1)$
پوشا نیست زیرا $-1\in\mathbb{R}$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $x^2\notin -1$

مثال: $g:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$، $g(x)=x^2$ یک به یک نیست. پوشا است.

۱۳۹۵/۰۴/۰۸

مثال: یک به یک.
پوشا نیست.

$h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad h(x) = x^2$

مثال: دوسویی است.

$K: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$K(x) = x^2$

$\boxed{\text{تمرین } \underline{۱۲} \text{ ص } \underline{۹۲} :}$

هردو حالت الف و ب به صورت کلی قبلاً ثابت شده اند. ولی خب:

حل الف)

نکته: ★ $x \in f^{-1}(B) \equiv f(x) \in B$ ★ $y \in f(A) \equiv \exists a \in A,\ y \in f(a)$

$$x \in f^{-1}(\underbrace{f(A)}_{B}) \equiv f(x) \in B \equiv f(x) \in f(A) \equiv \exists a \in A,\ f(x) = f(a)$$

از آن جا که f یک به یک است پس ~~$f(x) = f(A)$~~ $f(x) = f(a)$ ایجاب می کند $x = a$. و از آن جا که $a \in A$ پس نتیجه می شود $x \in A$. خلاصه آن که $x \in f^{-1}(f(A))$ معادل است با $x \in A$ یعنی: $f^{-1}(f(A)) = A$

$\boxed{\text{تمرین } \underline{۱۳} \text{ – ص ۹۲ – قسمت الف}}$

حل. الف) فرض کنیم $x_1, x_2 \in X$. از $f(x_1) = f(x_2)$ باید نتیجه بگیریم $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \equiv \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} \equiv f(\underbrace{\{x_1\}}_{A_1}) = f(\underbrace{\{x_2\}}_{A_2})$$

$$\equiv f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\}))$$

$$\equiv \{x_1\} = \{x_2\} \equiv x_1 = x_2$$

۱۳۹۵/۰۴/۰۹

حل. ب) باید ثابت کنیم برای هر $y \in Y$ ، $x \in X$ وجود دارد به قسمی که $f(x)=y$.

فرض کنیم $y \in Y$. تعریف می‌کنیم $B=\{y\}$. طبق فرض

$$\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$$

به عبارت دیگر: $(y \in \{y\}) \equiv y \in f(\underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{A}) \equiv$ ①

① $\equiv \exists a \in A \,,\, y = f(a)$

از طرف دیگر $A \subseteq X$ و $a \in A$ نتیجه می‌دهد $a \in X$

خلاصه آن که $a \in X$ هست که $y=f(x)$ یعنی f پوشاست.

قضیه: فرض کنید $f: X \to Y$ تابعی یک به یک باشد و $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد، در این صورت:

$$f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

اثبات:

$$y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) \equiv \forall \gamma \in \Gamma : y \in f(A_\gamma) \equiv \forall \gamma \in \Gamma\ \exists a_\gamma \in A_\gamma \,,\, y = f(a_\gamma) \quad (*)$$

ادعا می‌کنیم تمام a_γ هایی که در سطر بالا مطرح شد با هم برابرند و در واقع همگی یک مقدار مانند a_0 هستند. در واقع اگر مثلاً a_1 و a_2 باشند که $y=f(a_1)$ و $y=f(a_2)$ آن گاه چون تابع، یک به یک است نتیجه می‌شود $a_1=a_2$. پس a_γ ها مقادیر متمایزی نمی‌توانند باشند و برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $a_\gamma = a_0$. بنابراین:

۱۰
تیر
۱۴۳۷
رمضان ۲۴
2016
30 June

۱۳۹۵/۰۴/۱۰

$(۲) \equiv \forall \gamma \in \Gamma : \exists a_0 \in A_\gamma , y = f(a_0)$

$\equiv \exists a_0 \in \bigcap A_\gamma : y = f(a_0) \equiv y \in f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$

■ تابع وارون :

یادآوری: اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد آن‌گاه معکوس این رابطه که با R^{-1} نشان می‌دهیم رابطه‌ای است از Y به X :

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

قضیه: فرض کنید $f: X \to Y$ تابعی دوسویی باشد آن‌گاه $f^{-1}: Y \to X$ یک تابع دوسویی است.

نکته: توجه کنید f خواه دوسویی باشد یا نباشد f^{-1} به عنوان یک رابطه قابل تعریف است. اما این که این رابطه چه زمانی تابع است از قضیهٔ بالا قابل فهم خواهد بود.

۱۱
تیر
رمضان ۲۵
1 July

۱۳۹۵/۰۴/۱۱

اثبات قضیه: اولاً از آن‌جا که f در گام اول رابطه‌ای از X به Y است پس f^{-1} رابطه‌ای است از Y به X. ثانیاً باید ثابت کنیم $Dom(f^{-1}) = Y$. بدین منظور

$$Dom(f^{-1}) = Im(f) \overset{f \text{ پوشاست}}{=} Y$$

ثالثاً باید ثابت کنیم اگر $(y, x_1) \in f^{-1}$ و $(y, x_2) \in f^{-1}$ آن‌گاه $x_1 = x_2$ ، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (y, x_1) \in f^{-1} \equiv (x_1, y) \in f \equiv y \in f(x_1) \\ (y, x_2) \in f^{-1} \equiv (x_2, y) \in f \equiv y \in f(x_2) \end{array}\right\} \xrightarrow{f \text{ یک‌به‌یک}} x_1 = x_2$$

ثابت کردیم f^{-1} ~~ثابت~~ تابع است. برای اثبات یک به یک بودن
۱۳۹۵/۰۴/۱۲

باید ثابت کنیم اگر $(y_1, x)\in f^{-1}$, $(y_2, x)\in f^{-1}$ آنگاه $y_1 = y_2$

$$\left.\begin{array}{l}(y_1, x)\in f^{-1} \equiv (x, y_1)\in f \\ (y_2, x)\in f^{-1} \equiv (x, y_2)\in f\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تابع است } f} y_1 = y_2$$

نهایتا برای پوشا بودن باید ثابت کنیم $Im(f^{-1}) = X$ از طرفی

$$Im(f^{-1}) = Dom(f) \underset{\text{است}}{\overset{\text{تابع } f}{=}} X$$

ترکیب توابع: فرض کنید $f: X \to Y$ $g: Y \to W$ توابع دلخواهی باشند

ترکیب این دو تابع که با gof نشان می‌دهیم تابعی است از X به W با ضابطه

$$gof: X \to W$$

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

به عبارت دیگر

$$gof = \{(x, w) \mid \exists y \in Y, (x, y)\in f, (y, w)\in g\}$$

مثال: اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ آن‌گاه

$f(x) = x^2 + \sin x$ و $g(x) = e^x + 3$:

$\boxed{gof: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + \sin x) = e^{x^2 + \sin x} + 3$

مثال: اگر $f:\{x,y,z,t\}\to\{1,2,3\}$ ، $g:\{1,2,3\}\to\mathbb{Z}$

$f=\{(x,1)\ (y,1)\ (z,2)\ (t,3)\}$

$g=\{(1,7)\ (2,5)\ (3,15)\}$

در این صورت ، $gof:\{x,y,z,t\}\to\mathbb{Z}$

پیوست :

قضیه: فرض کنید $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ و $h:Z\to W$.
توابعی دلخواه باشند همواره
$ho(gof)=(hog)of$

اثبات: (تمرین داخل کتاب.)

قضیه: فرض کنید $f:X\to Y$ تابعی دلخواه باشد.

الف) اگر $g:Y\to X$ باشد که $gof=I_X$ آن‌گاه f یک به یک است

ب) اگر $h:Y\to X$ باشد که $foh=I_Y$ آن‌گاه f پوشاست.

در این قضیه I_X تابع همانی X است به صورت $I_X:X\to X$
و I_Y نیز تابع همانی Y است. $I_X(x)=x$

اثبات: (تمرین داخل کتاب)

فصل چهارم : مجموعه‌های شمارای نامتناهی و ناشمارا.

۱۳۹۵/۰۴/۱۴

یادآوری: اگر تابع یک به یک و پوشای $f: X \to Y$ وجود داشته باشد آن‌گاه گوییم یک تناظر یک به یک بین X و Y وجود دارد.

تعریف: مجموعه‌ی X را نامتناهی گوییم هرگاه X با یک زیر مجموعه‌ی سره از خودش در تناظر یک به یک باشد. مجموعه‌ای که نامتناهی نیست را مجموعه‌ی متناهی گوییم.

نکته: اگر X نامتناهی باشد طبق تعریف $Y \subset X$ وجود دارد به قسمی که $f: X \to Y$ یک به یک و پوشاست. در واقع تابع $f: X \to Y$ با همان ضابطه بالا تابعی یک به یک و غیر پوشاست که در آن $f(x) = Y \subset X$. پس معادل تعریف بالا می‌توان گفت X نامتناهی است هرگاه تابع $f: X \to X$ وجود داشته باشد که یک به یک است ولی پوشا نیست (یعنی $f(X) \neq X$)

مثال: ثابت کنید مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ نامتناهی اند.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابع بالا یک به یک است ولی پوشا نیست.

$\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = x+1$ $\qquad f(\mathbb{N}) = \{\overset{f(1)}{2}, \overset{f(2)}{3}, \overset{f(3)}{4}, \dots\} \neq \mathbb{N}$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{Z} : g(x) = 2x$ و یک به یک است اما پوشا نیست

$g(\mathbb{Z}) = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \neq \mathbb{Z}$

۱۳۹۵/۰۴/۱۵

مثال: نشان دهید ϕ و مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ نامتناهی نیستند.

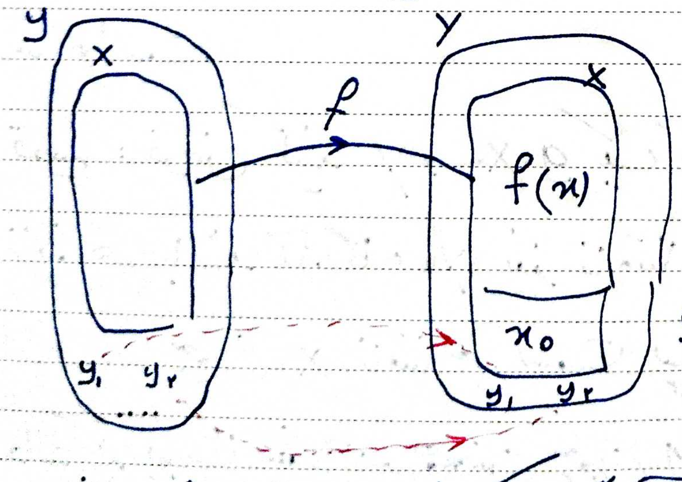
حل) طبق تعریف باید نشان دهیم ϕ و $\{x\}$ نامتناهی نیستند. اگر ϕ نامتناهی باشد باید با یک زیر مجموعه‌ی سره خودش در تناظر یک به یک باشد. و چون ϕ هیچ زیرمجموعه سره‌ای ندارد پس به تناقض می‌رسیم یعنی ϕ نامتناهی نیست یعنی متناهی است.

برای مجموعه‌ی $\{x\}$ تنها زیر مجموعه‌ی سره‌ی این مجموعه ϕ است و از آن جا که از $\{x\}$ به ϕ هیچ تابعی وجود ندارد پس نمی‌تواند نامتناهی باشد پس متناهی است.

قضیه: الف) هر ابر مجموعه یک مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

ب) هر زیر مجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

اثبات: فرض کنیم X مجموعه‌ای نامتناهی، $Y \subseteq X$. چون X نامتناهی است. پس تابع $f:X\to X$ هست که یک به یک است ولی پوشا نیست. برای اثبات نامتناهی بودن Y باید $g:Y\to Y$ بسازیم که یک به یک باشد ولی پوشا نباشد.



تابع g را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g:Y\to Y \qquad g(y)\begin{cases} f(y) & y\in X \\ y & y\in Y-X \end{cases}$$

g یک به یک است زیرا اگر $g(y_1)=g(y_2)$ آن گاه یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱- اگر $y_1, y_2\in X$: $g(y_1)=g(y_2)\Longrightarrow f(y_1)=f(y_2)\xRightarrow[\text{یک به یک}]{f} y_1=y_2$

۱۳۹۵/۰۴/۱۶

۱۶ تیر
چهارشنبه
۱۴۳۷ شوال ۱
2016 6 July

۲- اگر $y_1, y_2 \in Y-X$ $\quad g(y_1)=g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$

۳- اگر $y_1 \in X$ و $y_2 \in Y-X$ $\quad f(y_1)=g(y_2) \Rightarrow f(y_1)=y_2$

در این حالت از آن جاکه $f: X \to X$ پس $f(y_1) \in X$ از طرف دیگر $y_2 \in Y-X$. پس تساوی $f(y_1)=y_2$ یک تناقض است. پس حالت (۳) هیچ گاه رخ نمی دهد. برای اثبات غیرپوشا بودن g، از غیر پوشا بودن f نتیجه می گیریم $x_0 \in X$ هست که برای هر $x \in X$، $f(x) \neq x_0$ (مراجعه به شکل بالا). ادعا می کنیم برای هر $y \in Y$ نیز $g(y) \neq x_0$ زیرا اگر $y \in X$ باشد آن گاه $g(y) = f(y) \neq x_0$

اگر $Y-X$ آن گاه $g(y) = \underbrace{y}_{\in Y-X} \neq \underbrace{x_0}_{\in X}$

اثبات "ب": فرض کنیم Y متناهی و $X \subseteq Y$. باید ثابت کنیم X متناهی است. فرض کنیم X نامتناهی باشد از آن جاکه Y ابرمجموعه‌ی X است پس طبق (الف)، Y نیز باید نامتناهی باشد که خلاف فرض است پس X متناهی است.

قضیه: فرض کنید $g: X \to Y$ یک تناظر یک‌به‌یک باشد. اگر X مجموعه‌ای نامتناهی باشد آن گاه Y نیز نامتناهی است.

اثبات: چون X نامتناهی است پس تابع یک به یک $f: X \to X$ وجود دارد که پوشا نیست. همچنین چون g دوسویی است پس $g^{-1}: Y \to X$ نیز تابعی دوسویی خواهد بود.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "g^{-1}"', "\text{یک‌به‌یک}"] & Y \\
X \arrow[r, "f"', "\text{یک به یک}"] & X \arrow[u, "g"', "\text{دوسویی}"]
\end{tikzcd}$$

دوسویی

غیرپوشا

۱۳۹۵/۰۴/۱۷

۱۷ تیر ۱۴۳۷ شوال ۲ 2016 7 July

با داشتن توابع بالا تعریف می کنیم $h = gofog^{-1}: Y \to Y$

از آن جا که ترکیب هر دو تابع یک به یک تابعی است یک به یک (چرا؟ تمرین) پس $h: Y \to Y$ نیز تابعی است یک به یک.

از طرف دیگر برای اثبات غیر پوشا بودن:

$$h(y) = (gofog^{-1})(y) = gof(g^{-1}(y)) \underset{g^{-1}\text{ پوشاست}}{=} gof(x) = g(f(x))$$

چون f غیر پوشاست پس $f(x) \neq X$ و چون g یک به یک است.

$$g(f(x)) \neq g(X) \overset{\text{g پوشا}}{=} Y$$

پس $h(Y) \neq Y$ یعنی h پوشا نیست.

نتیجه: اگر $f: X \to Y$ تناظر یک به یک و X متناهی باشد آن گاه Y نیز متناهی است.

اثبات: فرض کنیم Y متناهی نباشد پس طبق تعریف نامتناهی است. و از طرف دیگر $g^{-1}: Y \to X$ یک تناظر یک به یک است پس طبق قضیه بالا X نیز نامتناهی است که تناقض با فرض گزاره است. پس Y متناهی است.

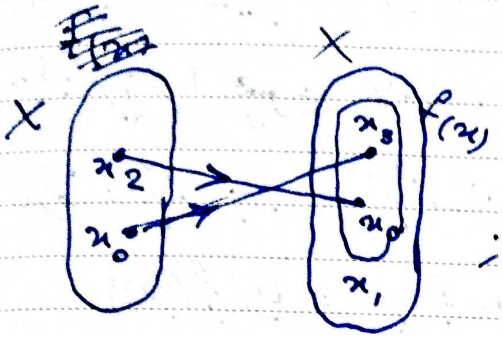
۱۳۹۵/۰۴/۱۸

۱۸ تیر شوال ۳ 8 July

قضیه: فرض کنید X مجموعه ای نامتناهی و $x_0 \in X$. در این صورت $X - \{x_0\}$ نیز مجموعه ای نامتناهی است.

اثبات: چون X نامتناهی است پس تابع $f: X \to X$ وجود دارد که یک به یک است ولی پوشا نیست. برای اثبات این که $X - \{x_0\}$ نامتناهی است. باید تابع $g: X - \{x_0\} \to X - \{x_0\}$ بیابیم که یک به یک باشد و پوشا

نباشد. دو حالت اتفاق می افتد.
1- $x_0 \in f(X)$
2- $x_0 \notin f(X)$



1- $x_0 \in f(X)$

در این حالت x_0 در برد تابع قرار دارد

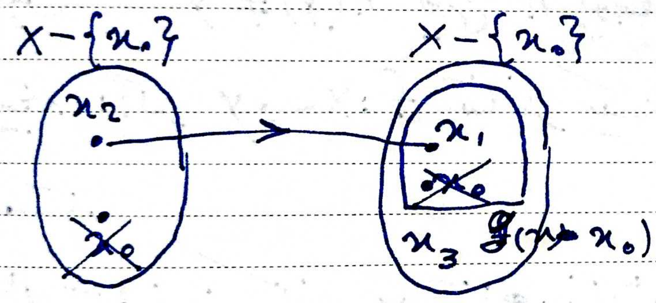
یعنی $x_2 \in X$ هست که $f(x_2)=x_0$. از

طرف دیگر چون x_0 در دامنه تابع وجود دارد پس

$f(x)$ تعریف شده یعنی مثلاً $x_3 \in f(X)$ هست که $f(x_0)=x_3$.

هم چنین f چون پوشا نیست پس $x_1 \in X$ هست که $x_1 \notin f(X)$

حال تابع $g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

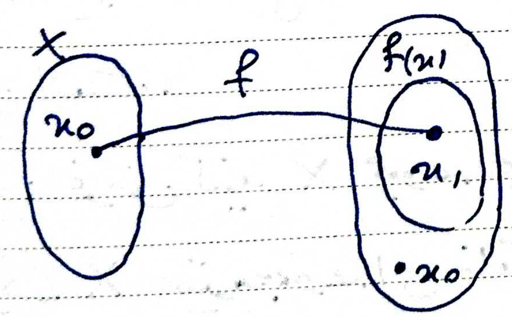


در واقع $g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$

$$\forall x \in X-\{x_0\} : g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_2 \\ x_1 & x = x_2 \end{cases}$$

تابع g یک به یک است اما پوشا نیست زیرا $x_3 \notin g(X-x_0)$

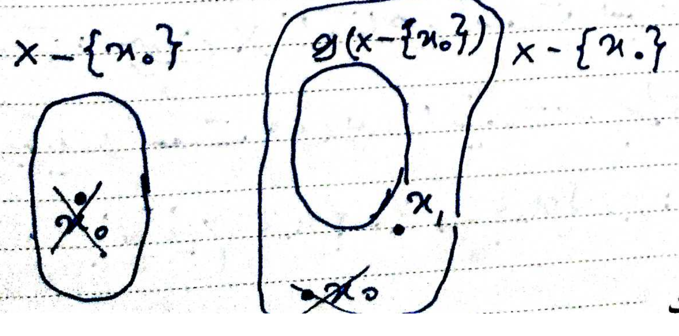
2- $x_0 \notin f(X)$



در این حالت تابع g را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$g: X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$

$\forall x \in X-\{x_0\} : g(x)=f(x)$



۱۳۹۵.۰۴.۲۰

تابع یک به یک است (زیرا f یک به یک است) اما پوشا نیست زیرا : $x_1 \notin g(X-\{x_0\})$

تعریف : برای هر $K\in\mathbb{N}$ مجموعه‌ی $\mathbb{N}_K$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathbb{N}_K=\{1,2,3,\dots,K\}$$

مثال : ثابت کنید برای هر $K\in\mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}_K$ مجموعه‌ای است متناهی.

حل) گزاره را با استقرا روی K ثابت می کنیم. به ازای $K=1$ داریم $\mathbb{N}_1=\{1\}$. در اولین قضیه‌ی این فصل ثابت کردیم مجموعه‌ی $\{x\}$ متناهی است پس $\mathbb{N}_1$ متناهی است.

فرض کنیم $\mathbb{N}_K$ متناهی است. باید ثابت کنیم $\mathbb{N}_{K+1}$ متناهی است.

$$\mathbb{N}_{K+1}=\{1,2,\dots,K,K+1\}$$

اگر $\mathbb{N}_{K+1}$ نامتناهی باشد آنگاه طبق قضیه مثل $\mathbb{N}_{K+1}-\{K+1\}$ نیز نامتناهی است. از طرفی $\mathbb{N}_{K+1}-\{K+1\}=\mathbb{N}_K$ یعنی با فرض نامتناهی بودن $\mathbb{N}_{K+1}$ نتیجه می شود $\mathbb{N}_K$ نامتناهی است که خلاف فرض متناهی بودن $\mathbb{N}_K$ است. پس $\mathbb{N}_{K+1}$ نیز مجموعه‌ای متناهی است.

قضیه : مجموعه‌ی X متناهی است اگر و تنها اگر $X=\emptyset$ یا X با یکی از $\mathbb{N}_K$ ها در تناظر یک به یک است.

اثبات : اگر $X=\emptyset$ باشد، مثلاً ثابت کرده ایم متناهی است. اگر X با یکی از $\mathbb{N}_K$ ها در تناظر یک به یک باشد آنگاه چون $\mathbb{N}_K$ متناهی است پس X نیز طبق قضیه متناهی خواهد بود.

۱۳۹۵/۰۴/۲۱

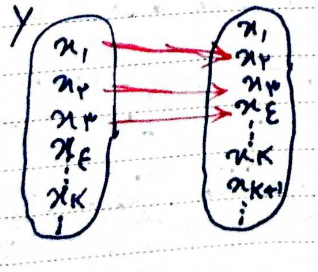
برعکس باید ثابت کنیم اگر X متناهی باشد آن گاه $X=\emptyset$ یا X با یکی از $\mathbb{N}_k$ ها در تناظر یک به یک است.

برای اثبات عکس نقیض این گزاره را ثابت می کنیم یعنی «اگر $X\neq\emptyset$ و با هیچ یک از $\mathbb{N}_k$ ها در تناظر یک به یک نباشد آن گاه X نامتناهی است.»

برای اثبات چون $X\neq\emptyset$ پس $x_1\in X$ وجود دارد. ادعا می کنیم $X-\{x_1\}$ ناتهی است. اگر تهی باشد بدین معناست که $X=\{x_1\}$ یعنی X با $\mathbb{N}_1$ در تناظر یک به یک است. که خلاف فرض است. پس مطمئنا $X-\{x_1\}$ ناتهی است. لذا $x_2\in X-\{x_1\}$ وجود خواهد داشت ادعا می کنیم $X-\{x_1,x_2\}$ نیز ناتهی است. زیرا اگر تهی باشد بدین معنی است که $X=\{x_1,x_2\}$ و X با $\mathbb{N}_2$ در تناظر یک به یک است که خلاف فرض است. پس $X-\{x_1,x_2\}$ ناتهی است. لذا $x_3\in X-\{x_1,x_2\}$ وجود دارد. با ادامهٔ این روند می توان گفت برای هر $k\in\mathbb{N}$ مجموعهٔ $X-\{x_1,x_2,\dots,x_{k-1}\}$ ناتهی است. لذا $x_k\in X-\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$ وجود خواهد داشت در واقع با انجام فرایند بالا مقادیر متمایز $x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},\dots$ را می توان از مجموعه X انتخاب کرد. مجموعهٔ همهٔ مقادیر بالا را با Y نشان می دهیم. ادعا می کنیم Y مجموعه‌ای نامتناهی است. زیرا

$g: Y\to Y$

$g(x_k)=x_{k+1}$



۱۳۹۵/۰۴/۲۲

g یک به یک است اما پوشا نیست (زیرا $(x_1 \notin g(Y))$ ثابت Y نامتناهی است. از طرف دیگر $Y \subseteq X$ یعنی X ابر مجموعه‌ی Y است. لذا طبق قضیه X نیز نامتناهی است.

مثال: ثابت کنید $A=\{1,2,t,s\}$ مجموعه‌ی متناهی است.

حل) کافی است ثابت کنیم A و $\mathbb{N}_4$ در تناظر یک به یک هستند.

$f: A \to \mathbb{N}_4$

$f(1)=1 \quad f(t)=3$

$f(2)=2 \quad f(s)=4$

f تابعی یک به یک و پوشا است.

هم توانی مجموعه ها: عبارت «تساوی تعداد عناصر دو مجموعه» در مورد مجموعه های متناهی قابل بیان است. مثلاً تعداد عناصر دو مجموعه $\{x,y,z\}$ و $\{1,2,3\}$ با هم برابر است. اما این عبارت در مورد مجموعه‌های نامتناهی چندان جالب نیست. مثلاً چندان جالب نیست که بگوییم تعداد عناصر $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ با هم مساوی است. لذا مفهوم هم توانی را ارائه می نماییم: تعریف: دو مجموعه X و Y را هم توان گوییم هرگاه یک تناظر دو سویی $f: X \to Y$ وجود داشته باشد. در این صورت معمولاً می نویسیم $f: X \sim Y$.

قضیه: رابطه‌ی هم توانی یک رابطه هم ارزی بر روی مجموعه ها ست.

اثبات: باید ثابت کنیم: ۱- برای هر مجموعه‌ی X، $X \sim X$.

یعنی باید تابع دوسویی از X به X بیابیم.

$f: X \to X$

$f(x) = x$

۱۳۹۵/۰۴/۲۳

تابع همانی یک تابع یک به یک و پوشاست.

۲- اگر $X\sim Y$ آن‌گاه $Y\sim X$.

چون $X\sim Y$ پس تابع دوسویی $f:X\to Y$ وجود دارد.
طبق قضیه فصل قبل $f^{-1}:Y\to X$ نیز دوسویی است یعنی $Y\sim X$.

۳- اگر $X\sim Y$ و $Y\sim Z$ آن‌گاه $X\sim Z$.

چون $X\sim Y$ پس $f:X\to Y$ دوسویی وجود دارد. چون $Y\sim Z$ پس $g:Y\to Z$ دوسویی وجود دارد. لذا از آن‌جا که ترکیب دو تابع دوسویی تابعی است دوسویی لذا $h=gof:X\to Z$ تابعی دوسویی است. یعنی $X\sim Z$.

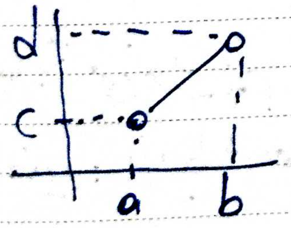
مثال: نشان دهید ۱- برای هر $a<b$ و $c<d$،
$(a,b)\sim(c,d)$

2- $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})\sim \mathbb{R}$

3- برای هر $a<b$، $(a,b)\sim\mathbb{R}$

4- $[0,1)\sim(0,1)$

حل) ۱- باید تابع $f:(a,b)\to(c,d)$ بنویسیم که یک به یک و پوشا باشد. خطی که از دو نقطه (a,c) و (b,d) می‌گذرد.



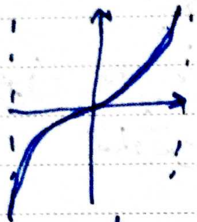
x_0 (a,c) y_0

$$y-c=\frac{c-d}{a-b}(x-a)\Rightarrow y=\frac{c-d}{a-b}(x-a)+c$$

۱۳۹۵/۰۴/۲۴ پس تابع $f:(a,b)\to(c,d)$

$f(x)=\frac{c-d}{a-b}(x-a)+c$ یک به یک و پوشاست.

2- تابع $f:(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=tg x$



f پیوسته است و صعودی اکید (زیرا $f'(x)=1+\tan^2 x>0$) پس یک به یک است.

f پوشا نیز هست. برای هر $y\in\mathbb{R}$ تعریف می کنیم $x=\tan^{-1}(y)$ با این تعریف $f(x)=y$.

3- طبق قسمت 1 داریم برای هر $a<b$ ، $(a,b)\sim(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. طبق قسمت 2 نیز $\mathbb{R}\sim(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ پس از آن جا که هم توانی یک رابطه متعدی است لذا همواره $(a,b)\sim\mathbb{R}$

4- تابع $f:[0,1)\sim(0,1)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم و هر $x\in[0,1)$ که به شکل بالا نیست تحت تابع f به خودش تصویر شود. در واقع $f:[0,1)\to(0,1)$

$0\to\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\to\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\to\frac{1}{4}$

$\frac{1}{n}\to\frac{1}{n+1}$

۱۳۹۵/۰۴/۲۵

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=0\\ \frac{1}{n+1} & n=2,3,4\dots\\ x & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

f یک به یک و پوشاست. برای یک به یک بودن اگر $f(x_1)=f(x_2)$ آنگاه اگر x_1 و x_2 هردو به شکل $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{m}$ باشند.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{m})\Rightarrow\frac{1}{n+1}=\frac{1}{m+1}\Rightarrow n=m\Rightarrow x_1=x_2$$

اگر x_1 و x_2 هردو در یکی از دو ضابطه دیگر تابع صدق کنند
۱۳۹۵/۰۴/۲۶

بازهم یک به یک بودن نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم $x_1=\frac{1}{n}$ و $x_2 \neq \frac{1}{n}$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{m} = x_2 \Rightarrow \frac{1}{m}=x_2 . \times$$

چون x_2 به شکل $\frac{1}{n}$ نیست به تناقض می‌رسیم.

برای پوشا بودن f باید ثابت کنیم برای هر $y\in(0,1)$ ، $x\in[0,1)$ هست که $f(x)=y$. اگر $y=\frac{1}{2}$ آن‌گاه $f(0)=\frac{1}{2}$

اگر $y=\frac{1}{m}$ و $m=3,4,5,\dots$ آن‌گاه $x=\frac{1}{m-1}\in[0,1)$

$$f(x)=f\left(\frac{1}{m-1}\right)=\frac{1}{m}$$

اگر y به شکل دو حالت بالا نباشد $f(y)=y$ خواهد بود یعنی $x=y$.

قضیه: فرض کنید X و Y و Z و W مجموعه‌های دلخواه و $f:X\sim Y$ و $g:Z\sim W$. اگر $X\cap Z=\emptyset$ و $W\cap Y=\emptyset$ آن‌گاه $f\cup g: X\cup Z\sim Y\cup W$

اثبات: طبق فرض می‌دانیم که g و f توابع دوسویی اند. باید ثابت کنیم $f\cup g$ نیز با شرایط فوق تابع دوسویی است.

$$f\cup g: X\cup Z \to Y\cup W$$

$$(f\cup g)(t)=\begin{cases} f(t) & t\in X \\ g(t) & t\in Z \end{cases}$$

ادامه‌ی اثبات : پیوست : 2016/12/25 15:03

۱۳۹۵/۰۴/۲۷

اگر $y\in Y$ آن‌گاه از آن‌جا که f پوشاست پس $x\in X$ هست که $f(x)=y$. و با توجه به تعریف h کافیست $t=x$ را در نظر بگیریم. در این صورت.

$$h(t)=h(x)=f(x)=y$$

اگر $y\in W$ نیز چون g پوشاست پس $z\in Z$ هست که $g(z)=y$ و به طریق مشابه $h(z)=y$.

قضیه: اگر X و Y و Z و W مجموعه‌های دلخواه و $X\sim Y$ و $Z\sim W$ آن‌گاه $X\times Z\sim Y\times W$

اثبات: چون $X\sim Y$ پس تابع دوسویی $f:X\to Y$ وجود دارد.
چون $Z\sim W$ " " " $g:Z\to W$ وجود دارد.

برای آن‌که نشان دهیم $X\times Z\sim Y\times W$ تابع زیر را تعریف می‌کنیم.

$$h:X\times Z\to Y\times W \qquad h(x,z)=(f(x),g(z))$$

چون f و g تابع اند پس h نیز تابع است (چرا؟: تمرین).

h یک به یک است زیرا:

$$h(x_1,z_1)=h(x_2,z_2)\Rightarrow (f(x_1),g(z_1))=(f(x_2),g(z_2))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1)=f(x_2) \xrightarrow{f \text{ یک به یک}} x_1=x_2 \\ g(z_1)=g(z_2) \xrightarrow{g \text{ یک به یک}} z_1=z_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1,z_1)=(x_2,z_2)$$

برای پوشا بودن باید ثابت کنیم برای هر $(y,w)\in Y\times W$، $(x,z)\in X\times Z$ هست که $h(x,z)=(y,w)$

۱۳۹۵/۰۴/۲۸

چون $(y, w) \in Y \times W$ پس $y \in Y$ و $w \in W$.
چون f پوشاست پس برای $y \in Y$، $x \in X$ هست که $f(x)=y$ و چون g پوشاست برای $w \in W$، $z \in Z$ هست که $g(z)=w$. پس

$$(y, w) = (f(x), g(z)) = h(x, z)$$

تمرین ۷ ص ۱۲۱:

حل) عکس نقیض گزاره را ثابت می‌کنیم یعنی « اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند آن‌گاه $A \cup B$ متناهی است »
اگر A یا B تهی باشد حکم بدیهی است. پس فرض می‌کنیم هردو ناتهی باشند.
چون A و B متناهی اند پس A با $\mathbb{N}_k$ و B با $\mathbb{N}_{k'}$ در تناظر یک به یک است. یعنی

$f: A \to \{1, 2, \dots, k\}$ دوسویی

$g: B \to \{1, 2, \dots, k'\}$ دوسویی

ابتدا فرض می‌کنیم $A \cap B = \emptyset$. در آخر در حالتی که $A \cap B \neq \emptyset$ صحبت خواهیم کرد
برای آن که $g(B)$ هیچ اشتراکی با $f(A)$ نداشته باشد تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$g_1: B \to \{k+1, k+2, \dots, k+k'\}$$
$$g_1(b) = g(b) + k$$

$f: \{x, y, z\} \to \{1, 2, 3\}$
$g: \{a, b\} \to \{1, 2\}$
$g_1: \{a, b\} \to \{4, 5\}$

۱۳۹۵/۰۴/۲۹

حال با داشتن دو تابع f و g_1 از آن‌جا که دامنه و حوزهٔ مقادیر این دو تابع هیچ اشتراکی با هم ندارند می‌توان تابع

$$h = f \cup g_1 : A \cup B \to \{1, 2, \ldots, K+K'\}$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g_1(x) & x \in B \end{cases}$$

h تابعی است دو سویی (چرا؟) پس $A \cup B$ در تناظر یک به یک با $\mathbb{N}_{K+K'}$ خواهد بود یعنی $A \cup B$ متناهی است.

اگر $A \cap B \neq \emptyset$ آن‌گاه به جای $A \cup B$ می‌توان از $A \cup \underbrace{(B-A)}_{C}$ استفاده کرد.

ادامه در پیوست : ffice_Lens : 12/25/16 – 15:41

یادآوری : $X \sim Y$ اگر و تنها اگر $f : X \to Y$ دوسویی

- اگر $X \sim Y$ و $Z \sim W$ و $X \cap Z = \emptyset$ و $Y \cap W = \emptyset$ آن‌گاه $X \cup Z \sim Y \cup W$.
- اگر $X \sim Y$ و $Z \sim W$ آن‌گاه $X \times Z \sim Y \times W$.

تعریف : مجموعه‌ی X را شمارای نامتناهی گوییم هرگاه $X \sim \mathbb{N}$

تعریف : مجموعه‌ی X را شمارا گوییم هرگاه X متناهی باشد یا شمارای نامتناهی باشد.

نکته : فرض کنید X شمارای نامتناهی باشد. پس تابع دوسویی $f : \mathbb{N} \to X$ وجود دارد به قسمی که $f : \mathbb{N} \to X$

$$f(1)\in X \Longrightarrow f(1)=x_1$$

$$f(2)\in X \Longrightarrow f(2)=x_2$$

$$f(3)=x_3$$

چون f یک به یک و پوشا نیست پس همه‌ی اعضای X دقیقاً ۱ بار به فرمت بالا ظاهر شده اند. یعنی: $X=\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

در واقع در فرمت بالا با قرار دادن یک شمارش روی اعضای X، تمام آن‌ها را داخل یک مجموعه مرتب کرده ایم. به همین دلیل واژه‌ی شمارا در مورد آن (یعنی X) به کار می رود.

قضیه: هر زیر مجموعه نامتناهی از یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

اثبات: فرض کنید X شمارای نامتناهی باشد پس $X\sim\mathbb{N}$ یا به عبارت دیگر $X=\{x_1, x_2, \dots\}$. حال فرض کنیم $Y\subseteq X$ و Y نامتناهی باشد. باید ثابت کنیم Y شمارای نامتناهی است.

چون $Y\subseteq X$ پس اعضای Y همان x_i ها هستند که $x_i\in X$. فرض کنیم n_1 کوچکترین اندیسی باشد که $x_{n_1}\in Y$. قرار می دهیم $y_1=x_{n_1}$.

چون Y نامتناهی است پس $Y-\{x_n\}$ نیز نامتناهی است.

لذا n_2 را می توان کوچک ترین اندیسی در نظر گرفت که $x_{n_2}\in Y-\{x_{n_1}\}$

قرار می دهیم $y_2=x_{n_2}$.

مجدداً چون $Y-\{x_{n_1}\}$ نامتناهی است. لذا $Y-\{x_{n_1}, x_{n_2}\}$ نیز

۱۳۹۵/۰۴/۳۱

۳۱

تیر

۱۴۳۷

شوال ۱۶

2016

21 July

نامتناهی است و $y_3 = x_{n_3} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$ ~~$y_2 = x_{n_3} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$~~

وجود دارد. با ادامه ی همین روند می توان گفت برای هر $K \in \mathbb{N}$ ،

مجموعه $Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots x_{n_{K-1}}\}$ مجموعه‌ای است نامتناهی لذا اگر

n_K کوچکترین اندیس باشد $x_{n_K} \in Y - \{x_{n_1}, \dots, x_{n_{K-1}}\}$ قرار می‌دهیم

$y_K = x_{n_K}$. در واقع برای هر $K \in \mathbb{N}$ می‌توان $y_K \in Y$ متمایز از سایر

y_1 ها پیدا نمود. پس تابع $f: \mathbb{N} \to Y$ یک تابع یک به یک و پوشا خواهد بود

یعنی:

$f(K) = y_K$

$\mathbb{N} \sim Y$ یعنی Y شمارای نامتناهی است.

مثال: ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج $(\mathbb{N}_e)$ و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد $(\mathbb{N}_o)$ شمارای نامتناهی هستند.

حل) $\mathbb{N}_e$ مجموعه‌ای است نامتناهی. زیرا $\mathbb{N}_e = \{2, 4, 6 \dots\}$

$f: \mathbb{N}_e \to \mathbb{N}_e$ و $f(n) = n + 2$ یک به یک و $\mathbb{N}_o = \{1, 3, 5, \dots\}$

غیر پوشاست (زیرا $2 \notin f(\mathbb{N}_e)$). از طرف دیگر

۱۳۹۵/۰۵/۰۱

۱

مرداد

شوال ۱۷

22 July

$\mathbb{N}_e \subseteq \mathbb{N}$. پس طبق قضیه‌ی قبل $\mathbb{N}_e$ شمارای ناهتناهی است

شمارای ناهتناهی‌ها

$\mathbb{N}_o$ نیز مشابه بالا ثابت می‌شود.

روش دوم: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_e$ و $f(n) = 2n$ تابعی دو سویی

است پس $\mathbb{N}_e \sim \mathbb{N}$ یعنی $\mathbb{N}_e$ شمارای ناهتناهی است.

قضیه: اجتماع دو مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

۱۳۹۵/۰۵/۰۱

اثبات: فرض کنیم A و B دو مجموعه شمارای نامتناهی باشند پس $A\sim\mathbb{N}$ و $B\sim\mathbb{N}$. از طرف دیگر طبق مثال بالا $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_e$ و $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_o$. نتیجه آن که $A\sim\mathbb{N}_e$ و $B\sim\mathbb{N}_o$. ادامه‌ی اثبات را در دو حالت زیر پیگیری می کنیم.

۱- اگر $A\cap B=\phi$: در این صورت از آن جا که همواره $\mathbb{N}_e\cap\mathbb{N}_o=\phi$ پس طبق قضیه:

$$\begin{matrix} A\sim\mathbb{N}_e \\ B\sim\mathbb{N}_o \end{matrix} \ \xrightarrow[\mathbb{N}_e\cap\mathbb{N}_o=\phi]{A\cap B=\phi} \ A\cup B\sim\mathbb{N}_e\cup\mathbb{N}_o.$$

از طرفی $\mathbb{N}_e\cup\mathbb{N}_o=\mathbb{N}$ پس در واقع $A\cup B\sim\mathbb{N}$ یعنی $A\cup B$ شمارای نامتناهی است

۲- اگر $A\cap B\neq\phi$: در اینصورت $A\cup B=A\cup\underbrace{(B-A)}_{C}$

با این تعریف $A\cap C=\phi$، مجموعه‌ی C یا شمارای نامتناهی است یا متناهی

اگر C شمارای نامتناهی باشد طبق قسمت (۱) نتیجه می شود $A\cup C$ شمارای نامتناهی است. اما اگر C متناهی باشد. باید ثابت کنیم اجتماع یک مجموعه شمارای نامتناهی (یعنی A) و یک مجموعه‌ی متناهی (یعنی C) که البته اشتراک شان تهی است، مجموعه‌ای شمارای نامتناهی است.

C مجموعه‌ای متناهی است پس $K\in\mathbb{N}$ هست که $C\sim\mathbb{N}_K$.

A شمارای نامتناهی است پس $A\sim\mathbb{N}$. از طرف دیگر اگر $\mathbb{N}'=\{K+1,K+2,\dots\}$ آن گاه به راحتی می توان گفت $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}'$ است. کافی است تابع دوسویی

۱۳۹۵/۰۵/۰۳

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$ و $f(n)=n+k$ را تعریف کنیم.

پس از $A\sim\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}'$ می‌توان نتیجه گرفت $A\sim\mathbb{N}'$.

$$C\sim\mathbb{N}_k \quad \xRightarrow{A\cap C=\emptyset} C\cup A \sim \mathbb{N}_k\cup\mathbb{N}'$$
$$A\sim\mathbb{N}' \quad \mathbb{N}_k\cap\mathbb{N}'=\emptyset$$

از طرفی $\mathbb{N}_k\cup\mathbb{N}'=\mathbb{N}$ پس $A\cup C\sim\mathbb{N}$.

نتیجه: اگر A_1، A_2 ... A_n مجموعه‌های شمارای نامتناهی باشند آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ شمارای نامتناهی است.

اثبات: با استقرا روی n گزاره را اثبات می‌کنیم.

اگر $n=1$ باشد حکم برقرار است.

فرض کنیم حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد یعنی به ازای مجموعه‌های شمارای نامتناهی A_1 و ... A_k، $\bigcup_{i=1}^{k}A_i$ شمارای نامتناهی است. ادعا می‌کنیم برای $k+1$ مجموعه شمارای نامتناهی A_1 و ... A_k و A_{k+1} نیز حکم برقرار است یعنی $\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i$ شمارای نامتناهی است. زیرا

$$\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i=\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{k}A_i}_{\text{شمارای نامتناهی طبق فرض استقرا}}\Big)\cup\underbrace{A_{k+1}}_{\text{شمارای نامتناهی}}$$

طبق قضیهٔ قبل اجتماع هردو مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است پس حکم برقرار خواهد بود.

مثال: ثابت کنید $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

حل) $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ معادل آن است که ثابت کنیم $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است.

$$\mathbb{Z} = \underbrace{\{0, 1, 2, \dots\}}_{\mathbb{Z}_1} \cup \underbrace{\{-1, -2, -3, \dots\}}_{\mathbb{Z}_2}$$

$\mathbb{Z}_1$ و $\mathbb{Z}_2$ شمارای نامتناهی هستند زیرا

$f: \mathbb{Z}_1 \to \mathbb{N} \qquad f(k) = k+1$

$g: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{N} \qquad g(k) = -k$

f و g دوسویی اند پس $\mathbb{Z}_1 \sim \mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}_2 \sim \mathbb{N}$. پس $\mathbb{Z}_1$ و $\mathbb{Z}_2$ شمارای نامتناهی اند لذا اجتماع آن‌ها (یعنی $\mathbb{Z}$) نیز شمارای نامتناهی است.

قضیه: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ مجموعه‌ای شمارای نامتناهی است.

اثبات: تابع $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f(i,j) = 2^i 3^j$

تابع f یک به یک است زیرا $f(m,n) = f(i,j) \Rightarrow 2^m 3^n = 2^i 3^j$

چون 2 و 3 اعداد اول اند مستقیماً نتیجه می شود $m = i$ و $n = j$ اما f پوشا نیست زیرا به ازای $5 \in \mathbb{N}$ برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ ، $2^i \times 3^j \neq 5$

چون f یک به یک است پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ، از طرف دیگر $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N})$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نامتناهی است پس نتیجه می شود $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ نیز نامتناهی است و چون $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ پس طبق قضیه $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است یعنی $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$ و از آن جا که $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

نتیجه می شود $N\times N\sim N$ یعنی شمارای نامتناهی است.

۱۳۹۵/۰۵/۰۵

نتیجه: فرض کنید برای هر $k\in\mathbb{N}$ ، A_k مجموعه‌ای شمارای نامتناهی و برای هر $i\neq j$ داریم $A_i\cap A_j=\phi$ در این صورت $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ یک مجموعه شمارای نامتناهی است.

اثبات: A_k ها شمارای نامتناهی اند پس برای هر $k\in\mathbb{N}$ ، $A_k\sim\mathbb{N}$. از طرف دیگر برای هر $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}\times\{k\}=\{(1,k)(2,k)(3,k),\dots\}$$

به راحتی می توان نشان داد $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{k\}$. کافیست تابع $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\times\{k\}$. تعریف کنیم با ضابطه $f(n)=(n,k)$ که دو سویی است. لذا برای هر $k\in\mathbb{N}$ ، $A_k\sim\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{k\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1\sim\mathbb{N}\times\{1\} \\ A_2\sim\mathbb{N}\times\{2\} \\ A_3\sim\mathbb{N}\times\{3\} \\ \vdots \end{array}}$$

پس $A_k\sim\mathbb{N}\times\{k\}$

برای هر $i\neq j$ داریم $A_i\cap A_j=\phi$ و

همچنین برای هر $k\neq k'$ نیز

$(\mathbb{N}\times\{k\})\cap(\mathbb{N}\times\{k'\})=\phi$ پس طبق قضیه

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\sim\bigcup\mathbb{N}\times\{k\}$ از طرفی $\bigcup\mathbb{N}\times\{k\}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ پس

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و از آن جا که $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی

است، پس $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.

تمرین 7 ص 128

۱۳۹۵/۰۵/۰۶

اگر برای هر $k\in N$ ، مجموعه B_k شمارای نامتناهی باشد آنگاه $\bigcup_{k\in N} B_k$ شمارای نامتناهی است.

حل) تعریف می‌کنیم

$A_1=B_1$

$A_2=B_2-B_1$

$A_3=B_3-(B_2\cup B_1)$

$A_4=B_4-(B_1\cup B_2\cup B_3)$

$A_k=B_k-\bigcup_{i=1}^{k-1}B_i$

با تعریف بالا برای هر $i\neq j$ داریم $A_i\cap A_j=\emptyset$ و نیز $\bigcup_{k\in N}B_k=\bigcup_{k\in N}A_k$

A_k ها یا متناهی اند یا شمارای نامتناهی. پس برای هر $k\in N$ ، $A_k\sim N_k$ (برای هر $k\in N$) یا $A_k\sim N$. به طریق مشابه نتیجه بالا $A_k\sim N_k\times\{k\}$ یا $A_k\sim N\times\{k\}$. بنابراین $\bigcup_{k\in N}A_k$ هم‌توان با اجتماع $N\times\{k\}$ ها و $N_k\times\{k\}$ های به فرم بالاست. اما اجتماع این مجموعه‌ها زیرمجموعه $N\times N$ است. پس

$\bigcup_{k\in N}A_k \sim$ اجتماع مجموعه‌های بحث را $\subseteq N\times N$ (*)

حال از آنجا که A_1 نامتناهی است و $A_1\subseteq\bigcup_{k\in N}A_k$ پس $\bigcup_{k\in N}A_k$ نیز نامتناهی است. از طرف دیگر چون $N\times N$ شماراست

۱۳۹۵/۰۵/۰۷

پس طبق ~~قضیه~~ رابطه‌ی (*) $\cup A_k$ نیز شمارا است

مثال: مجموعه ~~[illegible]~~ همه‌ی اعداد گویا مجموعه‌ای است شمارا

حل) طبق تعریف $Q = \{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N, \gcd(m,n)=1\}$

در واقع $Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$

$$Q^+ = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in N, \gcd(m,n)=1\}$$

$$Q^- = \{\frac{-m}{n} \mid m,n \in N, \gcd(m,n)=1\}$$

واضح است که $Q^+ \sim Q^-$ پس کافی است ثابت کنیم Q^+ مجموعه‌ای است شمارای نامتناهی. تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f: Q^+ \to N \times N$$

$$f(\frac{m}{n}) = (m,n)$$

f یک به یک است زیرا:

$$f(\frac{m}{n}) = f(\frac{p}{q}) \Rightarrow (m,n) = (p,q) \Rightarrow m=p, n=q$$

۱۳۹۵/۰۵/۰۸

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

f پوشا نیست زیرا مثلاً $(2,4) \notin f(Q^+)$. بنابراین $f(Q^+) \subsetneq N \times N$

چون f یک به یک است پس $Q^+ \sim f(Q^+) \subseteq N \times N$ (*)

Q^+ نامتناهی است زیرا $Q \supseteq N$ (نامتناهی). همچنین از آن جا که

...

$N\times N$ شماراست پس طبق رابطه (*) Q^+ نیز شماراست

قضیه: هر زیر مجموعه شمارای نامتناهی است. اثبات

اثبات: مراجعه به کتاب.

پیوست: office_lens 1/1/17 13:44

■ مجموعه های ناشمارا:

قضیه: فاصله $(0,1)$ از اعداد حقیقی یک مجموعهٔ ناشماراست.

اثبات: هر $x\in(0,1)$ به صورت یک عدد اعشاری به فرم $x=0.x_1x_2x_3\ldots$ می باشد. تعداد اعداد پس از اعشار ممکن است متناهی باشد (مانند $x=\frac{1}{4}=0.25$) و یا نامتناهی باشند (مانند $x=\frac{1}{3}=0.33\ldots$). برای یکتایی نمایش، اگر بسط اعشاری یک عدد مختوم باشد از آخرین رقم اعشار یک واحد کم می کنیم و ارقام ۹ را به صورت نامختوم در جلوی آن رقم اضافه خواهیم کرد. یعنی مثلاً

$0.251=0.250999\ldots$ یا $0.25=0.24999\ldots$

پس با نمایش بالا هر $x\in(0,1)$ را می توان به صورت $x=0.x_1x_2x_3\ldots$ در نظر گرفت.

برای اثبات قضیه فرض کنیم $(0,1)$ شماراست پس تابع دوسویی $f:\mathbb{N}\to(0,1)$ وجود خواهد داشت. با توجه به نمایش هر $x\in(0,1)$ داریم:

$f(1)=0.x_{11}x_{12}x_{13}\ldots$

$f(2)=0.x_{21}x_{22}x_{23}\ldots$

$f(3)=0.x_{31}x_{32}x_{33}\ldots$

$\vdots$

$f(k)=0.x_{k1}x_{k2}x_{k3}\ldots x_{kk}$

۱۳۹۵/۰۵/۱۰

چون f پوشاست پس برای هر $z\in(0,1)$ ، $n\in\mathbb{N}$ هست که $f(n)=z$ حال $z\in(0,1)$ را به طریق زیر می‌سازیم: اگر $x_{11}\neq 5$ تعریف می‌کنیم $z_1=5$ و اگر $x_{11}=5$ تعریف می‌کنیم $z_1=1$. اگر $x_{22}\neq 5$ تعریف می‌کنیم $z_2=5$ و اگر $x_{22}=5$ تعریف می‌کنیم $z_2=1$

$\vdots$

اگر $x_{kk}\neq 5$ تعریف می‌کنیم $z_k=5$ و اگر $x_{kk}=5$ تعریف می‌کنیم $z_k=1$. با تعریف بالا $z=0.z_1z_2z_3\dots$ ساخته می‌شود. به وضوح $z\in(0,1)$ اما $z\neq f(1)$ زیرا اولین رقم اعشار z با اولین رقم اعشار $f(1)$ متفاوت است.

$z\neq f(2)$ زیرا دومین رقم اعشار $f(2)$ متفاوت است.

$\vdots$

$z\neq f(k)$ زیرا k امین رقم اعشار z با k امین رقم اعشار $f(k)$ متفاوت است. در واقع برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $f(n)\neq z$ و از آن جا که $z\in(0,1)$ پس f پوشا نیست که تناقض با دوسویی بودن f است.

نتیجه ۱: مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای ناشماراست.

اثبات: قبلاً ثابت کردیم برای هر $a<b$ ، $\mathbb{R}\sim(a,b)$ یعنی $\mathbb{R}\sim(0,1)$ چون $(0,1)$ ناشماراست پس $\mathbb{R}$ نیز ناشماراست.

نتیجه‌ی ۲: مجموعه‌ی اعداد گنگ $\mathbb{Q}^c$ مجموعه‌ای ناشماراست.

اثبات: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c$. قبلاً ثابت کردیم $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ای شماراست. فرض کنیم $\mathbb{Q}^c$ شمارا باشد (فرض خلف). از آن جا که اجتماع دو مجموعه شمارا

شمارا است. پس $Q \cup Q^c$ نیز شمارا است که در تناقض با ناشمارا بودن $\mathbb{R}$ است.

۱۳۹۵/۰۵/۱۱

۱۱ مرداد ۱۴۳۷ شوال ۲۷ 2016 1 August

تمرین ۷ ص ۱۳۰

حل: طبق قانون عکس نقیض $((p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p))$ ثابت می‌کنیم A شمارا است اگر و تنها اگر $A \times A$ شمارا باشد.

فرض کنیم A شمارا است. پس یا A متناهی است یا شمارای نامتناهی است. اگر شمارای نامتناهی باشد $f: A \to N$ دوسویی وجود دارد. تابع $g: A \times A \to N \times N$ را با ضابطه

$\forall a, b \in A : g(a,b) = (f(a), f(b))$

یک تابع دوسویی است (چرا؟) پس $A \times A \sim N \times N$ یعنی شمارای نامتناهی است

اگر A متناهی باشد آن‌گاه $k \in N$ هست که $A \sim N_k$ است. به طریق مشابه بالا اثبات می‌شود. $A \times A$ نیز متناهی است.

برعکس فرض کنیم $A \times A$ شمارا باشد پس یا متناهی است. یا شمارای نامتناهی. اگر $A \times A$ شمارای نامتناهی باشد آن‌گاه $f: A \times A \to N \times N$

$f(a,b) = (f_1(a), f_2(b))$.

یک به یک و پوشا وجود دارد. تابع $g: A \to N$ تعریف می‌کنیم $g(a) = f_1(a)$

g نیز یک به یک و پوشا است (چرا؟) پس $A \sim N$.

اگر $A \times A$ متناهی باشد نیز به طریق مشابه ثابت می‌شود A متناهی است.

پیوست: Office Lens 1/1/17 15:16

۱۳۹۵/۰۵/۱۲

$\boxed{\text{تمرین ۹ ص ۱۲۸ :}}$ X مجموعه ی شمارای نامتناهی است. شمارای متناهی از X مانند Y وجود دارد که $X-Y$ نامتناهی است.

حل) X نامتناهی است پس $f: \mathbb{N} \to X$ دوسویی وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f(n)=x_n$.

به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم $y_k = f(2k) = x_{2k}$.

اگر Y مجموعه ی همه ی y_k های انتخاب شده به صورت فوق باشد.

$$Y = \{x_2, x_4, x_6, \dots\}$$

$$X - Y = \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$$

لذا $Y \sim \mathbb{N}_e$ و $X - Y \sim \mathbb{N}_o$. از آن جا که قبلاً نشان داده ایم $\mathbb{N}_e \sim \mathbb{N}_o \sim \mathbb{N}$ پس هردو مجموعه ی Y و $X-Y$ شمارای نامتناهی هستند.

$\boxed{\text{تمرین ۱۵ :}}$

حل) مجموعه ی A_k را مجموعه ی همه ی چندجمله ای های از درجه ی k با ضرایب صحیح در نظر می گیریم. در واقع :

$$A = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, \dots, k, \ a_k \neq 0\}$$

ضمناً k

زیرا اگر $a_k = 0$ باشد چندجمله ای از درجه ای کمتر از k خواهد بود.

چون $a_i \in \mathbb{Z}$ پس $A_k \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}(\mathbb{Z}-\{0\})$ در واقع تابع

دوسویی f به صورت زیر قابل تعریف است.

۱۳۹۵/۰۵/۱۳

۱۳ مرداد ۱۴۳۷ شوال ۲۹ 2016 3 August

$$f: A_K \longrightarrow \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$$

$$f(a_0 + \cdots + a_K x^K) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_K)$$

از طرفی چون $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}-\{0\}$ هردو شمارای نامتناهی هستند پس حاصل ضرب هر K تایی از آن ها نیز شمارای نامتناهی است. (why?*) پس A_K شمارای نامتناهی است.

برای هر $K \in \mathbb{N}$، A_K شمارای نامتناهی است پس طبق قضیه $\bigcup_{K \in \mathbb{N}} A_K$ نیز شمارای نامتناهی است. یعنی مجموعه‌ی همه‌ی چند جمله‌ای ها با ضرایب صحیح، شمارای نامتناهی است.

*مثال: اگر $A_1, A_2, \ldots, A_K$ مجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشند ثابت کنید $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_K$ شمارای نامتناهی است.

حل)

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \sim \mathbb{N} \\ A_2 \sim \mathbb{N} \\ \vdots \qquad \vdots \\ A_K \sim \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_K \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$$

حال، قبلاً ثابت کردیم $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است

پس به استقرا ثابت می شود $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \mathbb{N}}_{K\ \text{بار}}$ شمارای نامتناهی است.

۱۳۹۵/۰۵/۱۶

۱۶ مرداد
۱۴۳۷ ذی‌القعده ۳
2016 6 August

برای اثبات پوشا بودن باید ثابت کنیم برای هر $y \in Y$ ، $x \in X$ هست که $g(x) = y$.

اگر $y \in Y - X$ آن‌گاه بنا بر پوشا بودن f ، $x \in X - Y$ هست که $f(x) = y$ و طبق تعریف $g(x) = f(x) = y$.

اگر $y \in X \cap Y$ آن‌گاه طبق تعریف g $g(y) = y$. لذا g پوشا است.

مثال: ثابت کنید اگر $A \times B$ متناهی باشد A و B متناهی اند. (A و B ناتهی)

حل) چون $B \neq \emptyset$ پس $b \in B$ وجود دارد. از طرفی همواره $A \times \{b\} \subseteq A \times B$. از طرفی طبق قضیه (زیر مجموعه هر مجموعه متناهی، متناهی است) چون $A \times B$ متناهی است، پس $A \times \{b\}$ متناهی است.
از طرف دیگر A به $A \times \{b\}$ زیرا تابع $f: A \to A \times \{b\}$ یک تابع دوسویی است. لذا از متناهی بودن $A \times \{b\}$ نتیجه می‌شود A نیز متناهی است. به طریق مشابه ثابت می‌شود B نیز متناهی است.

مثال: اگر A و B متناهی باشند، ثابت کنید $A \times B$ متناهی است.

حل) عکس نقیض گزاره را ثابت می‌کنیم.
«اگر $A \times B$ نامتناهی باشد، A یا B نامتناهی اند.»

چون $A \times B$ نامتناهی است پس $f: A \times B \to A \times B$ وجود دارد که
$f(a,b) = (f_1(a,b), f_2(a,b))$
یک به یک است ولی پوشا نیست.

۱۷
مرداد
۱۴۳۷
ذی‌القعده ۲
2016
7 August

پوشا نبودن f به این معناست که $(a_1, b_1) \in A \times B$

۱۳۹۵/۰۵/۱۷

وجود دارد که به ازای هر $a \in A$ و $b \in B$:

$$f(a,b) \neq (a_1, b_1)$$

درواقع یا به ازای هر $a \in A$، $b \in B$، $f_1(a,b) \neq a_1$

یا $f_2(a,b) \neq b_1$.

اگر حالت اول رخ دهد بدین معناست که تابع یک به یک و غیرپوشا از A به A وجود دارد و اگر حالت دوم رخ دهد چنین تابعی از B به B وجود دارد. یعنی در هر صورت حداقل یکی از دو تابع A و B نامتناهی اند.